Cursus
der
Darstellenden Geometrie
nebst
ihren Anwendungen auf die Lehre der Schatten und der Perspektive, die Holz- und Stein-Konstruktionen

von

Guido Schreiber,

Professor der darstellenden Geometrie und der praktischen Geometrie an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Zweiter Theil.
Geometrische Zeichnungslehre.

Erste Lieferung.

Mit dreizehn Kupfertafeln.

Karlsruhe,
Druck und Verlag von Christian Theodor Groos.
1833.

Geometrische
Zeichnungs-Lehre

enthaltend

die Schattenlehre, Linear- und Luftperspektive nebst einem Anhange über Gnomonik

von

Guido Schreiber,

Professor der darstellenden Geometrie und der praktischen Geometrie an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

EIGENTHUM DER STADT AUGSBURG

Erste Lieferung.

Geometrische Schattenkonstruktionen.

Mit dreizehn Kupfertafeln.

Karlsruhe,
Druck und Verlag von Christian Theodor Groos.
1833.

Zeichnungslehre.

Einleitung.

Von der Anordnung und Behandlung geometrischer Zeichnungen.

1. Einen Körper von gegebener und vollkommen definirbarer Gestalt durch Zeichnung auf ebenen Flächen genau darstellen, so daß die Zeichnung jene Gestalt richtig und vollständig ausdrückt, dies ist in der Einleitung zur darstellenden Geometrie als einer der Hauptgegenstände dieser Wissenschaft bezeichnet worden, oder vielmehr als ihre nächste und unmittelbarste Anwendung.

Jeder graphischen Darstellung aber liegt eine der drei Projektionsarten zu Grunde, die wir in dem Kurse der reinen darstellenden Geometrie unter einem allgemeinen Gesichtspunkte betrachtet haben. Die Lehren der orthogonalen Projektion sind dort ganz ausführlich behandelt, und es bleibt uns hier nur wenig zu sagen, über die Art ihrer Anwendung bei geometrischen Zeichnungen.

Die Verfertigung genauer Zeichnungen mittelst der schiefen und der polaren oder perspektivischen Projektion bildet großentheils den Gegenstand des gegenwärtigen Bandes.

2. Was die Art und Weise anlangt, wie die Projektionen irgend eines vorgelegten Körpers gefunden werden können, so ist schon (D. G. Art. 22) bemerkt worden, daß hiefür eine allgemeine Vorschrift zu ertheilen nicht möglich sei; daß vielmehr der einzuschlagende längere oder kürzere Weg, das zu befolgende mühsame oder schneller fördernde und zierlichere Verfahren lediglich der Beurtheilung und dem Scharfsinne des Arbeitenden anheimgestellt bleibe. Die ganze Operation gehört übrigens zu sehr in die spezielle Lehre vom Aufnehmen, als daß man hier zu mehr als einigen allgemeinen Andeutungen Veranlassung nehmen sollte.

Wenn es sich um Zeichnung eines Modelles, eines Instrumentes, einer Maschine oder dergleichen handelt, so findet sich daran sehr oft ein, seiner Dimension oder vorherrschenden

Wichtigkeit nach, ausgezeichneter Theil, dessen einfache, etwa kubische, prismatische, scheiben-, walzen- oder kegelförmige Gestalt sich leicht in einer oder der andern Projektion ergiebt, und an welchen dann die übrigen Stücke und Einzelheiten sich reihen.

In manchen Fällen sind nicht materielle Stücke des Gegenstandes zuerst festzusetzen, wohl aber besondere lineare Verhältnisse, als die gegenseitigen Abstände gewisser Angriffspunkte, durch welche die Einrichtung des Ganzen bedingt wird.

Bei architektonischen Gegenständen haben die Hauptformen in der Regel ein sehr einfaches Verhältniß, das ohne sonderliche Schwierigkeit in der Projektion wiederzugeben ist, und zwar gewöhnlich zuerst in der horizontalen; nachdem dies geschehen folgt der stufenweise Uebergang von den wichtigern bis zu den letzten Details. Kenntniß des jeweils vorgelegten Gegenstandes an sich, und Uebung an gewählten Beispielen führen übrigens hier, wie unter so vielen andern Umständen, bald zu einer Fertigkeit im Auffassen, und zur erforderlichen Gewandtheit im Wiedergeben selbst der zusammengesetztesten Formen.

3. Ueber die zweckmäßige Anordnung geometrischer Zeichnungen ist indeß hier einiges Nähere anzuführen. Geometrisch nennt man vorzugsweise die nach der Methode der rechtwinkligen Projektion ausgeführten Zeichnungen; und immerhin bleibt von allen Projektionsarten diese die einfachste, und als Vorschrift für auszuführende Arbeiten die bequemste.

Eine zeichnerische Darstellung, die vollkommen seyn soll, muß die vorgestellten Formen mit solcher Bestimmtheit ausdrücken, daß es möglich wird, nach den Angaben der Zeichnung jene Formen körperlich nachzubilden. Abstrakt genommen ist nun ein solch bestimmter Ausdruck erreicht, wenn man auf zwei Projektionsebenen, von polyedrischen Körpern lediglich die Projektionen der Ecken und Kanten angiebt, und von krummflächigen Körpern noch alles, was erfordert wird, um so viele Punkte ihrer Oberfläche zu konstruiren, als man will; wie dies in der darstellenden Geometrie von vielen Beispielen geschehen.

Wenn dort schon gezeigt worden, wie sehr manche Konstruktionen durch eine kluge Wahl der Projektionsebenen vereinfacht und abgekürzt werden konnten, so erscheint die Wahl dieser Ebenen bei geometrischen Zeichnungen fast noch wichtiger, denn die Zeichnung verfehlt durchaus ihren Zweck, wenn sie nicht deutlich und lesbar ist.

Zu den wesentlichen Bedingnissen einer leicht verständlichen Darstellung gehört einmal, daß so wenig als möglich wichtige Linien verdeckt erscheinen, die alsdann (D. G. Art. 26) punktirt angegeben werden. Dann, daß die wesentlichsten Dimensionen stets aus einer Projektion entnommen werden können, und nicht erst aus den indirekten Angaben zweier Projektionen abgeleitet werden müssen, denn selten hat man in den Ateliers, Bau- und Arbeitsstätten zu solchen Operationen Zeit und Gelegenheit.

4. Um faßlicher, und nicht zu sehr im Allgemeinen zu sprechen, stellen wir uns vor, es seie die Rede von der Darstellung eines polyedrischen Körpers, etwa eines Gebäudes, eines Möbelstückes oder derartigen Kunsterzeugnisses, Gegenstände, die sehr oft die Hauptgestalt eines rechteckigen Prisma zeigen. Hier wird man die Ebene der Grundfläche des Körpers als horizontale Projektionsebene wählen; die Zeichnung, welche daraus entsteht ist, was man im technischen Sprachgebrauche den Grundriß des Körpers nennt. Dieser Grundriß giebt nun offenbar die genannte Grundfläche in ihren wahren Verhältnissen wieder, das heißt nicht durch die Projektion verkürzt, so wie überhaupt die wahre Ausdehnung des Körpers, nach Länge und Breite.

Es ist jetzt natürlich die vertikale Projektionsebene mit einer der Prismenseiten parallel zu stellen, und es heißt die auf ihr entstandene Projektion des Körpers, dessen Aufriß. Nun könnte man allerdings in die Ebene dieses Aufrisses, die auf sämmtlichen Seitenflächen des Körpers etwa befindlichen Punkte, so wie die vor- und zurückspringenden Linien und Figuren projiciren, und es würden die mit der Projektionsebene parallelen Figuren auf ihr unverkürzt erscheinen. Allein es ist leicht einzusehen, daß durch das mögliche Aufeinanderfallen der Projektionen von Figuren verschiedener Seitenflächen des Körpers die Zeichnung so sehr mit Linien überfüllt würde, daß sie unleserlich wäre.

Diesem Uebelstande ließe sich ausweichen, wenn man parallel zu jeder Seite des Prisma eine vertikale Projektionsebene aufstellte, also im vorliegenden Falle vier, und auf jegliche nur jene Seite des Körpers projicirte, die in Bezug auf die Ebene die vorderste wäre.

Ein Aehnliches würde man auch beim Grundrisse befolgen müssen, wenn sich mehrere zu bestimmende, jedoch sich theilweise oder ganz deckende horizontale Flächen an dem Körper befänden, die für einen einzigen Grundriß zu vielerlei Figuren enthielten.

5. Durch diese verschiedenen Projektionen wird nun die äußere Form des Körpers deutlich genug ausgedrückt seyn, aber nicht so die innern Einrichtungen desselben, wenn dergleichen noch vorhanden wären. Dieses Innere nach waagerechter Ausdehnung zu zeigen, pflegt man eine horizontale Projektionsebene in passender Höhe durch den Körper selbst anzunehmen; den Schnitt des Körpers durch diese Ebene zu entwerfen, und manchmal auf dieselbe noch die unter ihr liegenden Theile des Körpers zu projiciren, wobei man natürlicherweise den über der Ebene liegenden Theil des Körpers hinwegdenkt und auch annimmt, daß die Ebene jene Theile nicht verdecke. Das auf solche Weise erhaltene Bild wird ein horizontaler Schnitt oder Durchschnitt genannt.

Man ordnet eben so vertikale Durchschnitte an, um innere Theile von Körpern nach vertikaler Richtung darzustellen. Auch auf diese zeichnet man häufig die Projektionen der

hinter der Ebene befindlichen Theile des Körpers. Man unterscheidet hiebei Längen und Querdurchschnitte, je nachdem die Richtung des Schnittes nach der Länge oder der Breite des Körpers läuft.

Der bloße vertikale Schnitt, ohne weitere Zugabe von Projektionen, heißt auch das Profil des Körpers.

In allen Fällen, wo der zu zeichnende Körper aus symmetrischen Theilen zusammengesetzt ist, lassen sich zwei oder mehrere Durchschnitte, oder auch horizontale Schnitte mit dem Grundrisse, und vertikale Schnitte mit dem Aufrisse, in eine Figur vereinigen. So kann z. B. die eine Hälfte der Zeichnung den einen Theil des Körpers im Grundrisse vorstellen, und die andere Hälfte, den mit dem ersten symmetrischen Theil, als horizontalen Schnitt u. s. w. Man wird stets gut thun, von solchen, Zeit und Arbeit ersparenden, Umständen Nutzen zu ziehen; auch die Zeichnung selbst immer mit dem Festsetzen der Symmetrieaxen beginnen.

6. Beim Ausziehen geometrischer Zeichnungen, welche bestimmt sind bloß in Linien zu bleiben, und nicht in Farben oder Tusch weiter ausgeführt zu werden, befolgt man, was die Gattung der anzuwendenden Linien betrifft, ziemlich allgemein die im ersten Theile (Art. 26) aufgestellten Regeln. Dann pflegt man die Schnittflächen bei Profilen und dergleichen zu schraffiren, und man sucht dem Ganzen durch hie und da angebrachte stärkere Linien, s. g. Schattenstriche, mehr Relief zu geben. Wir wollen hier anführen, was man bei einem verständigen Gebrauche dieser Linien zu beobachten habe.

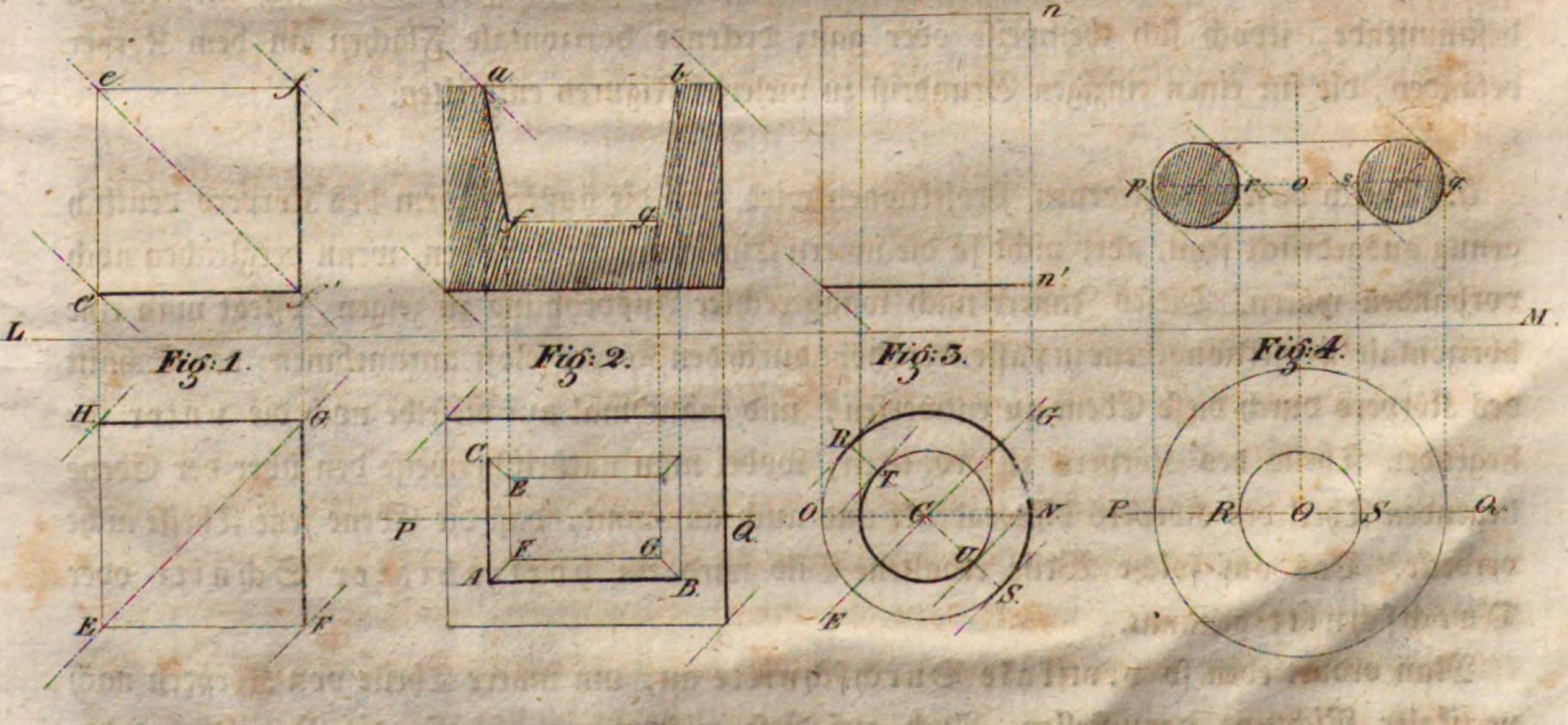


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Es seien die beiden Quadrate **H F**, *e f'* Grund- und Aufriß eines Würfels, von welchem zwei Seiten je mit einer Projektionsebene parallel laufen. Dieser Würfel seie durch parallele Lichtstrahlen so beleuchtet, daß diese Strahlen mit der Diagonale (**E G**, *e f'*) einerlei Richtung haben.

Bei dieser stets angenommenen Beleuchtung werden nun alle vorspringenden scharfen Kanten, welche einer erhellten und einer im Schatten liegenden Seite zugleich angehören, mit Schattenstrichen, d. h. mit stärkeren Linien, ausgezogen. Ich sage alle vorspringenden scharfen Kanten, denn weder eine einwärtsgehende Kante, auch wenn sie zwischen einer hellen und einer dunkeln Seite liegt, noch die im Schatten befindlichen scheinbaren Umrisse krummflächiger Theile dürfen als Schattenstriche behandelt werden.

Diese Regeln sind an oben stehenden vier Figuren deutlich gemacht.

Die Schattenstriche an den Projektionen des Würfels werden ohne Weiteres verständlich seyn.

Fig. 2 stellt einen Körper mit einspringenden Kanten vor. Man erkennt hier, daß (**C A**, *a*) und (**A B**, *a b*) für den hohlen Theil die Schattenstriche bilden. Die Linien (**C E**, *a f*), (**E F**, *f*), (**F G**, *f g*), (**G B**, *g b*) obgleich jede zwischen einer beleuchteten und einer dunkeln Fläche liegt, sind dennoch, als einspringende Kanten, wie gewöhnlich ausgezogen. Der Aufriß ist als der Schnitt des Körpers durch die Ebene **P Q** behandelt. Hier ist demnach die Linie *a f* des hohlen Theiles stark ausgezogen. Die Schattenstriche am konvexen Theile des Körpers sind im Grund- und Aufrisse dieselben wie beim Würfel.

Die Figuren 3 und 4 zeigen Beispiele krummflächiger Körper.

Fig. 3, ein vertikal stehender hohler Cylinder. Zieht man im Grundrisse mit der Projektion der Lichtrichtung die parallelen Tangenten an den Kreis **O R S**, so stellt der Bogen **R N S** den dunkeln Theil des Cylinders vor, und dieser ist als Projektion der oberen scharfen Kante stark ausgezogen. Für den hohlen Theil des Cylinders ist **T U** der Schattenstrich. An den Berührungspunkten **R**, **T**, **U**, **S** verlieren sich die starken Schattenstriche sanft in die hellen Linien. Im Aufrisse ist nur der untere Rand stark ausgezogen, nicht aber die Linie *n n'*, welche, obgleich im Schatten, doch den scheinbaren Umriß und keine scharfe Kante des Cylinders vorstellt.

Bei dem in Fig. 4 vorgestellten Ringe zeigt der Grundriß gar keine Schattenstriche, weil die beiden konzentrischen Kreise **P Q**, **R S** scheinbare Umrisse einer krummen Flächen sind. Im Aufrisse gilt dasselbe für die horizontalen Parallelen. Da aber der Aufriß zugleich den Schnitt des Ringes durch die Ebene **P Q** zeigt, so sind die Kanten dieses Schnittes wie der Grundriß von Fig. 3 behandelt.

7. Bei der Befolgung der angegebenen Regeln und Konvenienzen, wird eine in Linien ausgezogene geometrische Zeichnung gewiß jenen Grad von Deutlichkeit und Zweckmäßigkeit erhalten, dessen sie überhaupt fähig ist.

Immerhin ist aber diese Deutlichkeit sehr beschränkt, weil ein wesentlicher Uebelstand bloß linearer geometrischer Zeichnungen immer darin liegt, daß eine einzelne Projektion für sich uns nur einen sehr mangelhaften Begriff der vorgestellten Formen zu geben vermag, weil sie über eine Dimension uns gänzlich im Zweifel lassen muß. Nehmen wir z. B. eine horizontale Projektion an, so wird uns diese Länge und Breite des gezeichneten Gegenstandes angeben, aber keine Andeutung über dessen Höhe. Diese Höhe findet sich wohl in der vertikalen Projektion des Gegenstandes ausgedrückt, allein nun müssen wir erst aus der Vergleichung beider Projektionen uns eine Vorstellung der Gestalt, welche wiedergegeben werden sollte, abstrahiren.

Dies stete Vergleichen zweier Projektionen ist aber bei Darstellungen einigermaßen zusammengesetzter Gegenstände unbequem und mühsam; und man vermag oft ohne Hülfe einer dritten Projektion nicht einmal seinen Zweck zu erreichen.

Aus diesem Grunde hat man sich stets bestrebt, geometrischen Zeichnungen jene leichte Verständlichkeit zu verschaffen, welche gewöhnliche Ansichten besitzen. Man hat, um diesen Zweck zu erreichen, angenommen, die vorgestellten Körper befänden sich in dem beleuchteten Medium der atmosphärischen Luft, sie selbst seien beleuchtet, so daß auf ihrer Oberfläche helle und im Schatten liegende Theile entstehen, und daß sie auf die etwa umliegenden Körper und auf die Projektionsebene, auf der sie ruhend angenommen sind, Schatten werfen.

Indem man die Art und Weise der Beleuchtung durch unter einander parallele Lichtstrahlen festsetzte, etwa wie wir oben in Betreff der Schattenlinien angeführt, oder durch Strahlen, welche von einem gegebenen Punkte ausgehen, so ließen sich einmal alle daraus entstehenden Folgerungen leicht vorabsehen; und man entfernte sich dabei wenig von dem, was täglich vor unsern Augen vorgeht. Denn sind die Gegenstände um uns her von der Sonne beleuchtet, so kann man die Strahlen derselben für einen gegebenen Zeitpunkt als parallel unter sich betrachten; obgleich sie, wegen der nicht unendlich großen Entfernung der Sonne merklich gegen die Erde konvergiren. Geschieht die Beleuchtung durch das Licht einer Lampe oder einer Kerze, so kommt dies dem Falle, wo nur ein einziger leuchtender Punkt vorhanden ist, um so näher, je kleiner die Flamme ist, und fast immer könnte man den Mittelpunkt der Flamme als den Lichtpunkt betrachten.

Denken wir uns nun wieder vor unsere oben besprochene Horizontalprojektion, und setzen wir voraus, die Neigung der einfallenden Lichtstrahlen gegen die Horizontalebene seie bekannt, und es seien die Projektionen der Linien konstruirt, welche die Schatten auf den Körpern, so wie die von ihnen geworfenen Schlagschatten begränzen, so werden wir aus der Ausdehnung

dieser geworfenen Schatten und aus jenem bekannten Neigungswinkel sogleich auf die uns unbekannten Höhendimensionen schließen können. Und glauben wir auch in die Genauigkeit dieser Folgerung kein großes Vertrauen setzen zu dürfen, so wird doch die mit dem Schatten, dem übrigen Lichteffekte und mit Farben ausgeschmückte Zeichnung schon auf den ersten Anblick einen ziemlich richtigen Begriff von den dargestellten Formen und Verhältnissen in uns erwecken, und wenn noch die nöthigen Vertikalprojektionen, Durchschnitte u. dgl. ebenfalls mit ihren Schatten versehen sind, so wird man gewiß mit aller erwünschten Leichtigkeit alle Maaße und Verhältnisse ableiten können, die nicht in irgend einer dieser Projektionen unmittelbar gegeben seyn sollten; mit einem Worte, die Zeichnung wird alles erfüllen, was man ihrer Natur nach von ihr verlangen kann.

8. Ueberall da also, wo es sich um Darstellung von Formen handelt, und wo diese mittelst der rechtwinkligen Projektion geschehen soll, ist das Zeichnen der Schatten eine sehr nützliche Zugabe und in vielen Fällen eine nothwendige Bedingung. Man hat deßhalb schon oft die Schattenlehre das Komplement der darstellenden Geometrie genannt, und gewiß nicht mit Unrecht. Die Anwendung dieser Lehre beschränkt sich übrigens nicht bloß hierauf; denn da sie als geschlossene Doktrin alles umfaßt, was sich bei den Schatten zeichnerisch wiedergeben läßt, welche Form und gegenseitige Lage auch leuchtende und beleuchtete Gegenstände gegen einander haben mögen, so bildet die Schattenlehre nebst der Perspektive die Grundlage aller zeichnenden Kunst, deren Aufgabe überhaupt Darstellung von Formen ist.

Wir theilen diese Lehre in zwei Abschnitte. In dem ersten, der uns auch zunächst beschäftigen soll, haben wir es mit der Konstruktion der Linien zu thun, welche bei irgend einer angenommenen Art der Beleuchtung die Schatten der Körper begränzen. Der Gegenstand des zweiten Abschnittes ist dann die Bestimmung der Lichtstärke, welche, unter der gleichen Voraussetzung, jedem Theile der Oberfläche jener Körper zukommt.

Erster Abschnitt.

Geometrische Schattenkonstruktionen.

Allgemeine Begriffe.

9. Die Lehre von der graphischen Bestimmung der Schatten beruht zunächst auf einigen Hypothesen über die Natur des Lichtes, und die physische Beschaffenheit der beleuchteten Körper.

Jedermann weiß, daß das Licht sich in gerader Linie fortpflanze. In der Schattenlehre nimmt man diesen Satz ohne alle Einschränkung an, und man setzt voraus, daß die beleuchteten Körper sich im leeren Raume befänden, oder in einem durchsichtigen Mittel, dessen Molecüle aber kein Licht aufhalten, noch solches zurückstrahlen. Man abstrahirt von den Erscheinungen der Inflexion des Lichtes, die es in naher Berührung mit Körpern erleidet, so wie vorerst von denen der Reflexion, indem man annimmt, die Oberflächen der beleuchteten Körper seien vollkommen matt, so daß es durchaus keinen Gegenstand im Raume giebt, welcher das Licht reflektiren könnte.

10. Denken wir uns nun, es sei im ganzen Raume nichts vorhanden als ein leuchtender Punkt und ein dunkler Körper.

Der leuchtende Punkt wird sein Licht, gleich den Radien einer Kugel, nach allen Richtungen ausstrahlen und damit den ganzen Raum anfüllen, wenn diese Strahlen durch nichts in ihrem Wege aufgehalten werden. Allein eine gewisse Masse dieser Strahlen wird auf den vorhandenen dunkeln Körper treffen, und, von diesem aufgehalten, sich nicht weiter fortpflanzen können. Es entsteht dadurch hinter dem Körper, d. h. auf seiner vom Lichtpunkte abgewendeten Seite ein dunkler Raum.

Nehmen wir, zu mehrerer Deutlichkeit an, der dunkle Körper sei durch eine stetige krumme Fläche, von convexer, außerdem aber beliebiger Form, eingeschlossen. Betrachten wir den leuchtenden Punkt als Scheitel einer Kegelfläche, welche um den dunkeln Körper umschrieben

ist; so wird einleuchten, daß diese Kegelfläche die Summe aller Lichtstrahlen einschließe, die auf den dunkeln Körper treffen können, daß sie selbst betrachtet werden könne, als zusammengesetzt aus jenen Strahlen, welche die Oberfläche des Körpers streifen oder berühren, und, daß sie hinter dem Körper den Raum begränze, wohin kein Lichtstrahl kommen kann. Dieser dunkle Raum nun ist der Schatten des Körpers.

In diesem Sinne ist das Wort Schatten zu nehmen, wenn man von einer Mondsfinsterniß spricht und sagt, der Mond trete in den Schatten der Erde. Die Sonne ist hier der leuchtende Gegenstand, und die Erde der dunkle Körper, welcher einen Theil der Sonnenstrahlen auffängt, und dadurch hinter sich einen des Lichtes beraubten Raum bildet. So lange der Mond außer diesem Raume sich befindet, können ihn die Strahlen der Sonne treffen, er wirft sie zurück und wird uns dadurch sichtbar; allein so wie er in jenen Raum tritt, kann er kein Licht mehr empfangen, keines mehr reflektiren, und er wird unsichtbar.

In anderer Bedeutung wird der Ausdruck Schatten gebraucht, wenn Jemand etwa die Bemerkung machte, daß die Schatten am Mittage kürzer, und am Abend länger sind. Hier ist nicht ein durch die Zwischenstellung eines dunkeln Körpers dem Lichte entzogener Theil des Raumes gemeint, sondern die Projektion dieses Raumes auf der Oberfläche des Bodens.

In der Zeichenkunst heißt diese letztere Gattung von Schatten, Schlagschatten, eine Benennung, die wir stets in gleichem Sinne gebrauchen werden.

11. Nachdem wir gesehen, wie sich der Schatten eines Körpers gegen jene Körper verhalte, die sich in ihm befinden können, bleibt uns noch näher zu erörtern, was auf dem Schatten werfenden Körper selbst vorgehe. Denn es ist einleuchtend, daß nur ein Theil seiner Oberfläche erhellt seie, der andere vom Licht abgewendete Theil, aber selbst im Schatten liegen werde.

Um die Grenzlinie zwischen diesen beiden Theilen zu bestimmen, nehme man an, durch den leuchtenden Punkt sei eine Ebene gelegt, welche den dunkeln Körper in einem Punkte berühre; wird durch diesen Berührungspunkt und durch den Lichtpunkt eine gerade Linie gedacht, so kann diese offenbar als ein Lichtstrahl angesehen werden, welcher die Oberfläche des dunkeln Körpers streift. Sofort stelle man sich vor, daß jene berührende Ebene, ohne aus dem leuchtenden Punkte zu weichen, sich bewege, dabei aber stets berührend an den dunkeln Körper anliege, so wird man einsehen, daß die Umhüllung des Raumes, den die Ebene durchlaufen, bis sie wieder in ihre anfängliche Stellung zurückgekehrt ist, daß diese Umhüllung, sage ich, eben jene, aus den streifenden Lichtstrahlen zusammengesetzte Kegelfläche sei, die wir oben (Art. 10) betrachtet haben; daß ferner der Berührungspunkt der beweglichen tangirenden Ebene auf dem dunkeln Körper eine Linie beschrieben haben werde, welche die

Berührungslinie des Körpers und der Kegelfläche sei, und daß endlich diese Berührungslinie, welche im Allgemeinen eine doppelte Krümmung haben wird, den beleuchteten Körper in jene zwei Theile theilen werde, wovon der vordere der erhellte, der hintere aber der dunkle ist. Wir nennen diese Linie vorzugsweise die Trennungslinie von Schatten und Licht des Körpers.

12. Es ist sehr leicht, von den vorstehenden Betrachtungen zu dem Falle überzugehen, wo die Beleuchtung eines Körpers durch parallele Lichtstrahlen geschieht. Man braucht hiezu wirklich nur anzunehmen, daß die Entfernung des leuchtenden Punktes von dem dunkeln Körper unendlich groß sei. Alle den Körper streifenden Lichtstrahlen bilden dann, statt der Kegel-, eine Cylinderfläche: diese schließt den Schatten des Körpers ein; ihre Berührungslinie mit dem Körper, ist dessen Trennungslinie von Schatten und Licht; und, wenn ein rückwärts liegender anderer Körper an Weite die Cylinderfläche überragt und sie durchschneidet, so ist der von dem Umfange des Schnittes umschlossene Flächenraum, der Schlagschatten des ersten Körpers auf der Oberfläche des zweiten. Die Richtung paralleler Lichtstrahlen ist natürlicherweise bestimmt, wenn man einen von ihnen kennt, oder was dasselbe ist, eine gerade Linie, welche durch den unendlich entfernten Lichtpunkt geht. Ist diese Richtung gegeben, und man soll die genannte umhüllende Cylinderfläche konstruiren, so hat man nur parallel mit derselben eine tangirende Ebene an den beleuchteten Körper zu führen, und sie dergestalt um den Körper drehen zu lassen, daß dieser stets von ihr berührt wird, und sie immer parallel zu der Richtung des Lichtes bleibt. Die Reihe der auf diese Weise erhaltenen Berührungspunkte bezeichnet die Trennungslinie von Schatten und Licht, und die aufeinanderfolgenden einander unendlich nahe liegenden Durchschnittslinien der beweglichen Ebene sind eben so viele Erzeugungslinien der verlangten Cylinderfläche, oder wenn man will, eben so viele streifende Lichtstrahlen.

13. Fassen wir das Gesagte nun zusammen, so hat die Schattenlehre, in der Art, wie wir sie zunächst betrachten, folgende zwei allgemeine Aufgaben zu lösen.

Erstens. Es ist irgend eine Fläche gegeben und ein Punkt außer ihr; man soll aus diesem Punkte, als Scheitel, eine Kegelfläche beschreiben, welche die gegebene Fläche umhüllt, und man soll den Schnitt der Kegelfläche mit irgend einer andern Fläche konstruiren.

Zweitens. Es ist irgend eine Fläche gegeben und eine gerade Linie; man soll um die Fläche eine berührende Cylinderfläche beschreiben, deren Erzeugungslinien parallel zu jener Geraden sind; und man soll den Schnitt der Cylinderfläche mit irgend einer andern Fläche konstruiren.

In der Schattenlehre werden wir spezielle Beispiele nur über die zweite Aufgabe vorlegen,

weil man bei geometrischen Zeichnungen selten eine andere Beleuchtungsart anwendet, als durch parallele Strahlen.

Die erste Aufgabe umfaßt, wie später gezeigt werden wird, zugleich die ganze Linearperspektive, weßhalb wir das dahin Gehörige auch dort erst näher erörtern.

Wir beginnen die Reihe unserer Beispiele mit der Konstruktion der Schatten eckiger Körper, und gehen von diesen erst zu den krummflächigen Körpern über.

Konstruktion der Schatten eckiger Körper.

14. Eckig oder polyedrisch nennen wir alle Körper, welche durch ebene Seitenflächen, und folglich durch geradlinige Kanten eingeschlossen sind. Wird ein solcher Körper beleuchtet, so ist eine gewisse Anzahl seiner Flächen erhellt, und die übrigen liegen im Schatten. Die Linie, welche auf dem Körper die dunkeln und die beleuchteten Seiten von einander scheidet, ist die Vereinigung durchaus solcher Kanten, welche die Durchschnitte von je einer hellen und einer dunkeln Seitenfläche bilden.

Diese, nicht schwer zu findende Trennungslinie ist es, welche die Form des Schlagschattens des vorgelegten Köpers bestimmt. Wenn man sie als physische Linie betrachtet, und annimmt, der Körper selbst verschwinde, und nur diese Lienie bliebe von ihm im Raum zurück, so wird der Schatten, den sie wirft, einerlei seyn mit der Schattengrenze des erst gegebenen Körpers.

Alles dieses gilt ebenmäßig, ob der leuchtende Punkt unendlich weit von dem eckigen Körper entfernt sei, und also die von ihm ausgehenden Strahlen parallel unter sich sind; oder ob derselbe in endlicher Weite von jenem Körper sich befinde.

15. Betrachten wir nun eine einzige Kante des Schatten und Licht trennenden Polygons, und legen wir den letztgenannten Fall der Beleuchtung zu Grunde, nämlich den Fall der divergirenden Lichtstrahlen. Hier werden alle Strahlen, welche von dem Lichtpunkte auf die gegebene Kante treffen können, in einer Ebene liegen; und diese Ebene, verlängert gedacht, wird den Schatten jener Kante enthalten. Mit dem ganzen Körper in Verbindung, trennt diese Ebene den erhellten Theil des Raumes von demjenigen, welchem durch jenen Körper das Licht entzogen ist, und sie schneidet die Fläche, worauf der Schatten des Körpers fällt, nach einer Linie, welche den Schlagschatten der gegebenen Kante ausmacht, oder wenn man will, einen Theil vom Umfange des Schattens, den der Körper wirft.

Bei der Beleuchtung durch parallele Strahlen bilden alle jene, welche durch eine Kante der Trennungslinie gehen, gleichfalls eine Ebene, die den Schatten dieser Kante enthält, und die in allen Stücken die Schattenebene des ersten Falles vertritt.

Nimmt man sofort alle Kanten der Trennungslinie von Schatten und Licht im Zusammenhange, so ist deutlich, daß bei konvergirenden Lichtstrahlen der Schatten eines eckigen Körpers von einer Pyramide eingeschlossen sei, deren Scheitel der leuchtende Punkt, und deren Basis die Trennungslinie von Schatten und Licht auf dem Körper ist: daß, bei parallelen Strahlen derselbe Schatten von einem Prisma umschlossen werde, welches das mehrgenannte Polygon zur Basis, und, den Lichtstrahlen parallele Kanten hat.

16. Es ist, wie schon gesagt, leicht zu bestimmen, ob irgend eine Kante eines eckigen Körpers seiner Trennungslinie von Schatten und Licht angehöre, oder nicht. Man führe nur durch einen beliebigen Punkt dieser Kante einen Lichtstrahl: liegt dieser Strahl zwischen den beiden Flächen des Körpers, welche an die genommene Kante anstoßen, so sind entweder beide hell, oder beide im Schatten. Bleibt aber jener Lichtstrahl außerhalb des Raumes, den jene Flächen einschließen, so ist die eine von ihnen erhellt, die andere aber nicht, und die Kante ist ein Stück der gesuchten Trennungslinie. Die Ebene, welche von allen, durch die Punkte dieser Kante gehenden Lichtstrahlen gebildet wird, läßt die zwei anliegenden Flächen des Körpers ganz auf einer Seite von ihr.

Bei Körpern mit einwärtsgehenden Winkeln kann von zwei Flächen eines solchen Winkels die eine hell, die andere beschattet seyn, ohne daß darum die Kante, welche ihren Durchschnitt bildet, der Trennungslinie von Schatten und Licht angehört, weil immer auf die erhellte Seite der Schlagschatten der dunkeln fallen muß; wie die vorkommenden Beispiele zeigen werden.

17. Die ganze Aufgabe der Schattenbestimmung bei polyedrischen Körpern läßt sich demnach so ausdrücken: man soll diejenigen Kanten des Körpers aufsuchen, welche zwischen einer erhellten und einer dunkeln Seite desselben liegen; man soll parallel mit einer geraden Linie, welche die Richtung des Lichtes angiebt, oder aber durch den leuchtenden Punkt, und durch jede dieser Kanten Ebenen legen, und man soll die Schnitte dieser Schattenebenen durch gegebene Flächen verzeichnen.

Erstes Beispiel. Schatten eines Daches.

Erklärung der Zeichnung Tafel I.

18. Das rechtwinklige Polygon **ABCDE** ist der Grundriß von vier vertikalen Ebenen, welche den Außenseiten eines Gebäudes angehören. Dies Gebäude wird durch ein Dach bedeckt, das aus zwei gleichen dreieckigen Prismen zusammengesetzt ist, deren untere Ränder in der horizontalen Ebene fg liegen, und welche ein mit **ABCDE** parallel laufendes Polygon bilden. Die zwei Prismen durchschneiden sich nach der gebrochenen Linie (**H'IK**, hif), die in der

vertikalen Ebene H′ K liegt. Das Prisma *f h i* endigt sich in der schiefen Ebene F I′ H, *f i h*) welche eine steilere Neigung gegen die Horizontalebene hat, als die übrigen Dachflächen. In der Baukunst nennt man die obere Kante (I′ I M, *i m*) eines Daches, dessen Firstlinie, und wenn diese, wie in der Figur, gebrochen ist, so bildet das Dach eine Wiederkehr. Die vordere schiefe Fläche (F I′ H, *f i h*) heißt die Walmseite; die ausspringenden Kanten (I′ F, *i f*), (I′ H, *i h*), (I K, *i f*) sind Gräthe, und die einspringende Kante (I H′, *i h*) eine Kehle des Daches. Die Verbindung des Daches mit den Wänden des Gebäudes geschieht durch das Dachgesimse, was in der Figur als eine Zusammensetzung dreieckiger Prismen (A F C H′ G, *f g′ g*) behandelt ist.

Durch das Dach brechen zwei Schornsteine und ein Dachfenster. Die ersten betrachten wir als vertikale rechtwinklige Prismen, welche von einer eben solchen prismatischen Platte gekrönt sind. Das punktirte Rechteck O P ist die horizontale Projektion der vier Seitenflächen des ersten Schornsteines. Die ihn bedeckende Platte hat das von O P gleich entfernte Rechteck S R zum Grundrisse und das Rechteck *s′ q* zum Aufrisse.

Die vordere und hintere Seite des Rechteckes O P werden bis μ und π verlängert; man betrachte diese Parallelen als die Grundrisse zweier Vertikalebenen, welche die Verlängerungen der Seiten des Schornsteines sind; so werden diese Ebenen den Grath (I′ F, *i f*) in den zwei Punkten (μ, μ'), (π, π'), und die Walmseite des Daches nach zwei, durch diese Punkte gehende Horizontallinien durchschneiden.

Die Vertikalprojektionen $\mu' p'$, $\pi' p$ dieser Schnitte treffen die aus P und O errichteten Vertikalen in den vier Punkten o', p', p, o; es ensteht hiedurch ein Rechteck, die vertikale Projektion des Durchschnittes der vier Prismenseiten des Schornsteines mit der Walmseite des Daches.

Die Höhe des zweiten Schornsteines, so wie seine Deckplatte sind gegeben; seine Zeichnung bedarf keiner weitern Erklärung.

Das Dachfenster betrachte man vorerst als ein gleichschenklig-dreieckiges Prisma mit horizontalen Kanten, dessen Vertikalprojektion $r'\ \varrho'\ \tau'$ gegeben ist. Dies Priama endigt sich vorn in einer vertikalen Ebene, deren Grundriß $\tau\ \sigma'$ erhalten wird, wenn man $\tau'\ \varrho'$ verlängert, bis sie die *i h* in φ' durchschneidet, sodann diesen Punkt in horizontale Projektion nach φ auf die Gerade I′ H bringt, und $\varphi\ \tau$ parallel zu D E zieht; eine Konstruktion, welche der, vorhin bei dem ersten Schornsteine angewendeten ganz analog ist. Errichtet man die Senkrechte $\varphi'\ r''$ und zieht die Horizontale $r'\ r''\ r'''$ bis zu ihrer Begegnung in r''' mit der *i h*; trägt hierauf, nachdem die Vertikallinie $r'\ \varrho$ gezogen, die Länge $r''\ r'''$ von ϱ nach r, und verbindet diesen Punkt mit σ' und τ, welche den Ecken ϱ' und τ' des Aufrisses entsprechen; so ist der Grundriß des Dachfensters vollendet.

Man sieht die Richtigkeit dieser Konstruktion ein, wenn man erwägt, daß, außer dem Walme, alle Dachseiten gleiche Neigung gegen den Horizont haben, und daß folglich die Figur $i\ r'''\ r''\ \varphi'\ h$ als der umgelegte Schnitt angesehen werden kann, den die vertikale Ebene $r'\ \varrho$ in dem Fenster und der Dachseite machen wird. Im Innern des Dachfensters ist ein Rahmen angebracht, dessen vordere Seite in einer vertikalen Ebene liegt, welche die durch σ gehende Parallele zu $\sigma'\ \tau$ als Grundriß hat. Die Breite des Rahmens wird durch den Aufriß deutlich ausgedrückt.

Auf dem vorliegenden Blatte, so wie auf dem nachfolgenden, ist die Richtung der unter einander parallelen Lichtstrahlen, welche den gegebenen Körper beleuchten, durch die Linie angegeben, deren Projektionen die als Pfeile gezeichneten Geraden **L** und l sind.

Schatten des Schornsteines (**S R**, $p'\ s$).

19. Wenn man die Höhlung des Schornsteines außer Licht läßt, so besteht das System seiner Trennungslinien von Schatten und Licht;

erstens bei der Deckplatte: aus der kleinen Vertikallinie (**R**, $s\ s'$), aus den zwei Horizontalen (**R Q**, $s\ q$), (**Q S**, q), aus der Vertikalen (**S**, $q\ q'$) und aus den zwei Horizontalen (**S S'**, $q'\ s'$), (**S' R**, s'). Zweitens an dem, den Körper des Schornsteines bildenden Prisma: aus den zwei Vertikallinien (**P**, $p'\ p''$) und (**O**, $o'\ o''$).

Der Schlagschatten, welchen der Schornstein auf die Flächen des Daches und auf sich selbst wirft, wird umgränzt von den Schatten, die die genannten Theile seiner Trennungslinie von Schatten und Licht verursachen.

Wir beginnen, um diese verschiedenen Schatten zu konstruiren, bei dem Punkte (**R**, s). Der Schatten dieses Punktes liegt in dem Lichtstrahle, oder wenn man will, in der mit den Lichtstrahlen parallelen Geraden, deren Horizontalprojektion die mit **L** parallele Gerade **R** γ, und deren Vertikalprojektion die Parallele $s'\ y'$ zu l ist. An der Stelle, wo dieser Strahl eine der Dachflächen durchschneidet liegt der Schlagschatten des Punktes (**R**, s'). Aber die vertikal-projicirende Ebene $s'\ y'\ z'$ des genannten Lichtstrahles schneidet die Walmseite des Daches nach der Geraden ($y'\ z'$, $y\ z$). Die Linie **R** p begegnet der $y\ z$ in α, man bringe diesen Punkt in Vertikalprojektion nach α' auf der Geraden $y'\ z'$; und α, α' sind die Projektionen des Schlagschattens des Punktes (**R**, s') auf der vordern oder der Walmseite des Daches.

20. Nun bemerke man, daß der Schatten der vertikalen Linie (**R**, $s'\ s$) in der Ebene enthalten ist, welche durch diese Linie parallel mit dem Lichte geht; diese Ebene ist demnach vertikal, und ihre horizontale Projektion ganz in der durch **R** gehenden Parallelen zu **L**

enthalten. Der Lichtstrahl, welcher durch das obere Ende (**R**, s) der Geraden (**R**, $s'\,s$) geht, trifft die Dachseite (**H I**, $h\,i$) in dem Punkte (γ', γ), durch welchen der Schlagschatten der Geraden **R** begränzt wird.

In (γ, γ') beginnt der Schatten der Linie (**R Q**, $s\,q$). Der Lichtstrahl des Punktes (**Q**, q) durchschneidet die Dachseite (**H I**, $h\,i$) in (δ,' δ); und es ist $\gamma\,\delta$ die horizontale Projektion jenes Schattens; seine vertikale Projektion ist in der Geraden $i\,h$ enthalten.

Nun aber durchschneidet der Grundriß **I H'** der Dachkehle die Linie $\gamma\,\delta$ in ζ, woraus hervorgeht, daß der Schatten des Punktes (**Q**, q) nicht mehr auf (**H I**, $h\,i$) falle, sondern auf die Fläche (**G I**, $g\,i$). Wird durch ζ eine Parallele mit **L** rückwärts bis **Z** gezogen, so zeigt **R Z** das Stück des Randes (**R Q**, $s\,q$), an dessen Schatten von γ bis ζ reicht. Die projicirende Ebene des durch (**Q**, q) gehenden Lichtstrahles schneidet die Fläche (**G I**, $g\,i$) nach der Geraden ($\varepsilon'\,\delta'$, $\varepsilon\,\delta''$), dieser Schnitt wird von (**Q** δ, $q\,\delta'$) in (η, η'), dem Schlagschatten von (**Q**, q) getroffen. Es ist nun ($\zeta\,\eta$, $\zeta'\,\eta'$) der Schatten desjenigen Theils vom oberen Rande der Platte, welcher in **Z Q** projicirt ist, und dieser Schatten muß dem Rande selbst parallel seyn; weil (**R Q**, $s\,q$) mit der Dachfläche (**G I**, $g\,i$), worauf ihr Schatten fällt, parallel ist; und weil allgemein, wenn eine gerade Linie und eine Ebene unter sich parallel sind, jede durch die Gerade gehende Ebene die erste Ebene nach einer Parallelen zu der Geraden durchschneidet.

21. Was den Schatten der Linie (**Q S**, q) betrifft, so ist hier ein ganz ähnlicher Fall, wie vorhin bei der Vertikallinie (**R**, $s'\,s$), nämlich die schattenwerfende Linie steht senkrecht auf der vertikalen Projektionsebene, weßhalb ihr Schatten in vertikaler Projektion in der Linie $q\,\delta'$ liegt, welche durch q parallel mit l gezogen worden. Die horizontale Projektion $\varepsilon\,\delta''$ des Schnittes der projicirenden Ebene $q\,\delta'$ und der Dachfläche (**I G**, $i\,g$) ist schon vorhin konstruirt worden; eine aus **S** gezogene Parallele zu **L** trifft diese in ϑ, welchen Punkt man auf die $\varepsilon'\,\delta'$ nach ϑ' bringt, und somit die Grenze des Schattens von (**Q S**, q) bestimmt. Der Schatten der Vertikalen (**S**, $q'\,q$) projicirt sich horizontal nach der **S** ϑ; das Stück desselben zwischen dem Punkte (ϑ, ϑ') und der Kehle des Daches hat als vertikale Projektion das Stück $\varkappa'\,\vartheta$ der Linie $\varkappa'\,m$, der Vertikalprojektion von $\varkappa$ **M**.

Die durch (**S**, q') gezogene Parallele zu (**L**, l) trifft die Dachseite (**H' I**, $h\,i'$) in (k, $\varkappa''$) und beendigt hier den Schatten von (**S**, $q'\,q$).

Es bleibt nun noch der Schatten der zwei Horizontalen (**S S'**, $q'\,s'$) (**S' R**, s') zu verzeichnen.

Der erste fällt auf dieselbe Dachfläche wie der Schatten von (**R Q**, $s\,q$) und da beide Linien parallel sind, so sind es auch ihre Schlagschatten. Die horizontale Projektion $\varkappa''\,k'$

dieses einen Schattens läuft bis zu ihrem Zusammentreffen in k' mit der Parallelen P k', zu L, welche den Schatten der Vertikalen (P, p' p'') vorstellt. Ein Theil dieses letzteren Schattens, welcher auf der Walmseite des Daches liegt, hat als Vertikalprojektion die Gerade p' λ', deren Konstruktion aus der Zeichnung erhellt. (S R, s) steht auf der Vertikalebene senkrecht; ihr Schatten liegt daher in dem Schnitte (y' z', y z), den die Ebene s' z' in der Ebene (F I' H, f i' h) macht.

Man konstruirt den Schatten der vertikalen Kante (O, o o'') des Schornsteinkörpers in beiden Projektionen auf dieselbe Weise wie den Schatten von (P, p' p'').

Die von (S S', q' s') (S' R s') herrührenden Schlagschatten verlieren sich in dem allgemeinen Schatten des Schornsteines. Dieser Umstand giebt zu erkennen, daß jene zwei Linien auch auf den Schornstein selbst Schatten werfen müssen. Zieht man durch (S', s') einen Lichtstrahl, so schneidet dieser, nach der angenommenen Richtung dieser Strahlen nicht eine oder die andere Seitenfläche des Schornsteines, sondern beide zugleich in ihrer vordern vertikalen Kante, und dies geschieht in einem Punkte, dessen vertikale Projektion o'' ist. Durch diesen Punkt gehen also die Schatten, welche die mehrgenannten Linien auf den prismatischen Theil des Schornsteines werfen, und sie sind mit jenen parallel.

(Schatten des Schorsteines (T V, t' l).

22. Da dieser Schornstein auf ganz ähnliche Weise gebildet ist, wie der erste, und die gleichnamigen Flächen beider parallel sind, so ist auch das System der Schatten und Licht trennenden Kanten auf dem zweiten ganz gleichnamig mit jenem des ersten.

Der Schlagschatten des Schornsteines fällt auf zwei Seiten des Daches, er ist übrigens nur im Grundriß gezeichnet, weßhalb wir unsere Erklärung auf diesen beschränken.

Nachdem man vorerst V V' parallel zu L und von unbestimmter Länge gezogen, suche man den Schatten t'' des Punktes (T, t), wie die Figur es angiebt. Um die Richtung des Schattens der Kante (T T', t t') vollends zu bestimmen, bedarf es noch eines zweiten Punktes. Man könnte hiezu irgend einen Punkt der Kante wählen, und dessen Schatten, wie den des Eckpunktes (T, t) suchen; allein in dem vorliegenden Falle wird es einfacher seyn, wenn man sich die Kante (T T', t t') und die Dachfläche (F I, f i) worauf ihr Schatten fällt, so weit verlängert denkt, daß sich beide in einem Punkte (w, W) durchschneiden, wo dann W t'' die verlangte Richtung ist. Denn der Schatten einer geraden Linie auf einer Ebene geht offenbar durch den Punkt, wo die Linie und die Ebene zusammentreffen, oder verlängert zusammentreffen müßten.

Der Punkt (v w') begränzt den Schatten t'' v der Vertikallinie (T, t x'). Die Parallele v w zu T X ist der Schatten, den diese auf die Dachfläche F I wirft. In w bricht sich

dieser Schatten, und nimmt die Richtung $w\,x$, welche durch den Schnitt der projicirenden Ebene $x''\,w\,x'$ und der Dachfläche K M bestimmt wird. Man bemerke hiebei, daß die Horizontale $k'\,x''$ die Projektion des Schnittes bezeichnet, den die vertikale Projektionsebene in der Dachfläche K M hervorbringt. Die Parallele X x, zu L bestimmt den Punkt x, wo der Schatten $x\,u$ von X U anfängt, welche beide Linien parallel sind. U r, der Schatten von (U, $t'\,u'$), hat gleiche Richtung mit L. Bei r nimmt der Schatten von (T U, t') seinen Anfang; er hat die Richtung von $r'\,r''$, der horizontalen Projektion, welche der Geraden $z''\,v'$ entspricht. In r'' ändert der fragliche Schatten seine Richtung in die zu U T′ parallele Lage um; und verläuft sich in den Schatten der zweiten vertikalen Kante des Schornsteines.

Die Kante (T′ T, $t'\,t$) wirft auf den Schornstein selbst einen Schatten, dessen vertikale Projektion wie bei dem ersten Schornsteine konstruirt wird.

Schatten des Dachfensters.

23. Die Trennungslinie von Schatten und Licht wird bei diesem Theile unserer Figur gebildet von den zwei Linien ($r\,\varrho$, r') ($\varrho\,\tau$, $r'\,\tau'$).

Der Schlagschatten des Eckes (ϱ, r') liegt in (s, s'), wie die ausgeführten Konstruktionen anzeigen, und es sind demnach ($r\,s$, $r'\,s'$) ($s\,\tau$, $s'\,\tau'$) die von den obigen Trennungslinien geworfenen Schlagschatten. Der zu ($\varrho\,\sigma'$, $r'\,\varrho'$) parallele innere Rand der Fenstereinfassung wirft noch einen Schlagschatten auf den Rahmen, zu dessen Verzeichnung die nöthigen Hülfslinien gleichfalls angegeben sind.

Schlagschatten des Dachrandes auf die Wände des Gebäudes.

24. Es ist dieser Rand den Wänden parallel, daher auch sein Schlagschatten darauf ihm selbst parallel, und in vertikaler Projektion bestimmt durch den Punkt b, der Projektion des Schattens, den der Punkt (F, f') wirft.

Man bemerkt auf der Zeichnung noch im Aufrisse den Schlagschatten der Kante (H H′, h), und im Grundrisse den Schatten des vertikalen Eckes C.

---

25. Das vorliegende Beispiel hat uns Gelegenheit zu folgenden Bemerkungen gegeben:

I. Der Schatten einer vertikalen Linie liegt in einer vertikalen Ebene, und, welche Lage und Gestalt die Fläche, worauf dieser Schatten fällt, auch haben mag, so ist seine horizontale Projektion doch stets in der geraden Linie enthalten, welche durch den Punkt, der den Grundriß der vertikalen Linie vorstellt, parallel zu der Projektion des Lichtes gezogen wird.

Dasselbe gilt im Aufrisse für den Schatten jeder horizontalen Linie, die auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht.

II. Wenn eine gerade Linie mit einer Ebene parallel läuft, so ist ihr Schlagschatten auf dieser Ebene ihr selbst parallel.

III. Parallele Gerade haben auf einer und derselben Ebene parallele Schatten.

IV. In Bezug auf die geometrischen Konstruktionen hat man gesehen, daß es nicht immer nöthig ist, eine bestimmte Projektionsaxe (Durchschnittslinie der zwei Projektionsebenen) anzunehmen. Jedwede Horizontalebene kann als horizontale Projektionsebene dienen; und eben so kann jede der vertikalen Projektionsebenen parallele Ebene gleich dieser gebraucht werden.

Zweites Beispiel (Tafel II). Schatten einer Treppe.

Beschreibung des Bauwerkes.

26. Die Figur stellt eine Treppe vor, die zu einer Terrasse hinanführt. Die Treppe hat einen doppelten Aufgang, jeder von sieben Stufen, die sich in einem gemeinschaftlichen Ruheplatz vereinigen, von wo aus ein weiterer Arm der Treppe, ebenfalls von sieben Stufen, bis zum Niveau der Terrasse reicht. Die Stufen bilden abwechselnd horizontale und vertikale Flächen, und die Höhe einer jeden beträgt die Hälfte ihrer Breite. Die Längen der Stufen an beiden Aufgangsarmen sind durch den Abstand zweier parallelen Vertikalebenen bestimmt: eine davon bildet die Außenseite der Futtermauer der Terrasse, und ist im Grundrisse durch die punktirte Linie 1, 2 angegeben, die andere, $v\, w$, macht die innere Seite der Sargenmauer aus, in welcher die Stufen der Aufgänge einer Seits ruhen, so wie sie anderer Seits in die Futtermauer eingreifen. Die Länge des Ruheplatzes ist um zwei Stufenbreiten größer als die Breite des von ihm aufwärts führenden Treppenarmes *). Die zwischen zwei parallelen Vertikalebenen eingeschlossene Sargenmauer wird längs des Ruheplatzes oben in Form eines s. g. Eselsrückens durch zwei schiefe Ebenen abgeschrägt, deren gemeinsamer Durchschnitt eine ausspringende, den Seiten der Mauer parallele horizontale Kante (3 4, 3′ 4′) bildet, und deren Durchschnitte mit den Mauerseiten zwei jener ersten parallele Kanten sind, welche mit einander in der horizontalen Ebene liegen, deren Vertikalprojektion die Linie 5 6 ist. Längs der vom Ruheplatz abwärts gehenden Arme endigt sich die Sargenmauer gleichfalls in der Form von Eselsrücken, so daß die entstehenden Kanten dieselbe Neigung haben wie die Treppe, d. h. daß sie der Ebene parallel sind, welche durch die oberen vorstehenden Kanten der Stufen angenommen wird. Außerdem müssen diese abhängenden Flächen mit den erstgenannten sich

---

*) Dessen Breite, wie es der Gebrauch erfordert, größer angenommen ist, als die der Aufgangsarme.

so durchschneiden, daß die Schnitte in den Vertikalebenen (5′ 3, 5 3′) (6′ 4, 6 4′) liegen, welche auf *v w* senkrecht stehen. Die Sargenmauer endigt sich zu beiden Seiten an zwei sogenannten Würfeln, eigentlich Parallelepipeden, deren Gestalt Grund- und Aufriß deutlich ausdrückt. An die Mauer angelehnt ist ein als Ruhebank dienendes Parallelepipedon (*z* 7, *z*′ 7′) von gleicher Höhe wie die Würfel und von ihnen gleich entfernt.

Der vom Ruheplatz aufsteigende Treppenarm beginnt mit der Vorderseite seiner untersten Staffel in der Vertikalebene 1, 2. Er wird durch die zwei rechtwinklig zu 1 2 stehenden Vertikalebenen *n* 8, *m* 9 eingeschlossen. Die Futtermauer wird von einem Gesimse bekrönt, dessen Gestalt und Ausdehnung gleichfalls aus der Zeichnung erhellt. Längs des Gesimses läuft auf der Terrasse ein Geländer, das aus viereckigen Pfosten und eben solchen horizontalen, die Brustlehne bildenden, Holzstücken zusammengesetzt ist.

Konstruktion der Schatten.

27. Man wird bemerken, daß die Richtung der Lichtstrahlen für den Aufriß nicht dieselbe, wie für den Grundriß sei. Bei der Beleuchtung des ersten giebt (L, *l*) diese Richtung an; bei dem Grundrisse aber (L′, *l*). Wir haben diese verschiedene Beleuchtung gewählt, weil bei einzelnen Grundrissen, und vornehmlich bei Grundrissen architektonischer Gegenstände, eine Beleuchtung, wie die angenommene, gebräuchlich ist.

Die Trennungslinien von Schatten und Licht bei den verschiedenen Körpern dieses Bauwerkes sind, mit Ausnahme jener an der Sargenmauer, vertikale und horizontale Linien, welche zu erkennen keiner Schwierigkeit unterliegt; auch fallen die Schatten dieser Linien meistens nur auf vertikale und horizontale Ebenen, und wir haben die Konstruktionen des vorhergehenden Beispieles so ausführlich erklärt, daß wir den Leser gänzlich auf die Angaben der Zeichnung verweisen zu können glauben. Jedoch bei dem Schlagschatten des Geländers, im Grundrisse, werden einige Erläuterungen nothwendig seyn.

28. Wir sprechen von den zwei schattenwerfenden Kanten der Brustlehne (*a a*′, α α') und (*b b*′, β β').

Der Schatten der Punkte (*a*, α) fällt auf die horizontale Ebene des Ruheplatzes nach (*m*, *m*′), der des Punktes (*b*, β) nach (*n*, *n*′). Zwei durch *m* und *n* gezogene Parallelen zu *a a*′, die in *o* und *p*, an der Projektion der Kante der obersten Stufe aufhören, schließen den Schlagschatten eines Stückes der Brustlehne (*a b*′, β α') ein.

Der Schatten des Punktes (*b*, β) fiele auf die verlängerte Fläche der zweiten Stufe (von oben an gezählt) nach *q*, und mittelst dieses Punktes findet man, wie die Figur zeigt, den auf die zweite Stufe fallenden Theil des Schlagschattens. Man arbeitet so bei jeder Stufe und auch bei der horizontalen Projektionsebene (für welche hier die Oberfläche des Bodens

angenommen ist) und man erhält auf dieser mittelst der Punkte (r', r), (s', s) die Parallelen $r\,\varrho$, $s\,\sigma$ als Begränzungslinien des Schlagschattens des Geländers. Derselbe Schlagschatten fällt auch auf die obere Seite des Würfels, und es sind zur Konstruktion dieses Theiles gleichfalls die nöthigen Hülfslinien gezogen. Von hier aus läuft der Schatten über den abgeschrägten Theil der Sargenmauern. Wir betrachten die abschrägenden Ebenen verlängert, und finden die Gerade $w\,\varphi$ als den Horizontalriß der einen. Bedenkt man nun, daß die Gerade $s\,\sigma$ als Horizontalriß der Ebene angesehen werden kann, welche den Schatten der Kante ($b\,b'$, $\beta\,\beta'$) enthält, so erkennt man den Punkt σ, wo sich die zwei Risse schneiden, als einen Punkt in der Richtung des Schattens, den die genannte Kante auf die eine abschrägende Fläche wirft. Eben so ergiebt sich der Begegnungspunkt t der Linie $\varphi\,w$ und der $r\,\varrho$ als ein Punkt im Schlagschatten der Kante ($a\,a'$, $\alpha\,\alpha'$) auf derselben Ebene. Um noch einen zweiten Punkt für jeden Schatten zu erhalten, haben wir den Durchschnitt der schattenwerfenden Linie und der Ebene, die ihn auffängt, gesucht.

Die verlängerten Geraden $\varphi'\,3'$, $x'\,5'$ des Aufrisses schneiden die fortgesetzte Horizontale $\alpha\,\alpha'$ in f', v'; man bringe diese Punkte in horizontale Projektion nach f und v, ziehe die Gerade $f\,v$ bis sie die $a'\,a$ in π trifft, so ist π die horizontale Projektion des gesuchten Begegnungspunktes. Man wird die Richtigkeit dieser Konstruktion einsehen, so wie man in der Geraden $f\,v$ die Projektion des Schnittes erkennt, welchen die projicirende Ebene $\alpha'\,\alpha\,f'$ in der schiefen Ebene ($w\,3$, $x'\,3'$) macht.

Man hätte auch den Schatten des Punktes (a, α) auf der schiefen Ebene suchen können, um einen zweiten Punkt für die Linie $t\,\pi$ zu finden. Zu dem Ende bemerke man, daß die vertikalprojicirende Ebene des durch (a, α) gehenden Lichtstrahles die zwei Kanten der schiefen Ebene in (ϑ, d) und (ε, e) durchschneidet, und daß folglich der Durchschnitt dieser zwei Ebenen die Gerade $d\,e$ zur horizontalen Projektion hat. Die verlängerte $d\,e$ begegnet der $a\,r$ in λ, dem gesuchten Punkte, welcher mit t und π in gerader Linie liegt. Zieht man durch σ zu $t\,\lambda\,\pi$ eine Parallele, so begränzen diese beiden zwischen $w\,e$, $\varphi\,3$ den gesuchten Schlagschatten.

Auf die ähnliche Weise ist der Schlagschatten auf der schiefen Ebene ($\varphi\,3\,s'\,x$, $x'\,3$) gesucht und so die Linie $\varrho\,k$ gefunden, welche die Kante $\varphi\,3$ in einem Punkte c durchschneidet, der zugleich der Geraden $t\,\lambda$ angehört.

29. Wir geben keine weiteren Beispiele von der Bestimmung des Schattens eckiger Körper, weil uns hierüber nichts mehr zu sagen bleibt. Anfänger werden aber wohl thun, noch einige Aufgaben dieser Art sich selbst zu stellen, und wir rathen ihnen unter andern, den Schatten eines schiefliegenden Kreuzes oder eines sechszinkigen Sternes zu wählen.

Dieser Letztere ist zusammengesetzt aus einem Würfel, auf dessen sechs Seiten als Grundflächen sechs gleiche viereckige länglichte Pyramiden aufgesetzt sind. Die drei geraden Linien, welche je zwei gegenüberstehende Spitzen der Pyramiden verbinden, und welche wir Axen nennen wollen, kreuzen sich im Mittelpunkte des Würfels und stehen auf dessen Seitenflächen senkrecht. Der Stern werde nun so gestellt angenommen, daß drei seiner Spitzen in der Horizontalebene liegen, keine Axe aber der Vertikalebene parallel sei.

Um die Zeichnung des Körpers in dieser Lage zu verfertigen, denke man sich denselben zuerst so gestellt, daß eine seiner Axen vertikal sei, und die zwei andern horizontal, etwa wie der Grundriß der Fig. 2 auf Tafel **II.** angiebt, wo c die vertikale Axe, *b f*, *e d* die zwei horizontalen Axen vorstellen. Nun denke man, der Körper werde so gedreht, daß je zwei Enden der horizontalen Axen während der Drehung stets horizontal bleiben, und also zwei zu gleicher Zeit in der horizontalen Projektionsebene ankommen. Es seien *e* und *f* die Projektionen dieser zwei Ecken; denkt man sich durch *e* und *b* eine Vertikalebene gestellt, so werden, während der Drehung, jene Ecken immer in ihr bleiben, die andern Ecken aber Kreise beschreiben, deren Ebenen zu dieser parallel sind. Man pojicire also den Stern auf die Ebene *b e x* und man erhält, indem bloß Würfel und Axen betrachtet werden, die Figur *a c' a' e' b'*. Durch die Punkte des Grundrisses werden zu *x b* parallele Linien gezogen. Sodann zeichne man die Figur *a e' b' a'* in der Lage, daß der Punkt *a* unverändert, der Punkt *e'* aber in die Linie *x b* zu liegen komme; fälle dann aus allen neu erhaltenen Ecken auf die vorhin gezogenen Parallelen Senkrechte, so schneiden sich diese in den Punkten des Grundrisses bei der verlangten Stellung des Sternes. Man hat zu gleicher Zeit die Höhen aller Ecken über der Horizontalebene (so drückt z. B. *x α* die Höhe der obersten Ecke aus), wenn daher *l m* die eigentliche Projektionsaxe ist, so findet man die ihr entsprechende vertikale Projektion des Sternes, indem aus allen Punkten des Grundrisses auf *l m* Senkrechte errichtet, und auf jede die Höhe aufgetragen wird, die den entsprechenden Punkten des Grundrisses zukommen; und indem man dann die zusammengehörigen Punkte verbindet. Nachdem dies geschehen, können die Hülfsprojektionen hinweggewischt werden.

30. Wenn die Zeichnung vollendet und die Richtung des Lichtes bestimmt worden, sollten zunächst die Trennungslinien von Schatten und Licht aufgefunden werden, allein bei der schiefen Lage aller Seiten des Sternes lassen sich diese Linien nicht sogleich erkennen und statt das (Art. 16.) angegebene Verfahren zu befolgen, wird man schneller verfahren, wenn man den Schatten aller Kanten des Sternes ohne Unterschied sucht. Diejenigen Kanten nun, deren Schatten die Grenzen des allgemeinen Schattens bilden, gehören zur Trennungslinie von Schatten und Licht. Es werden jene begrenzenden Geraden aber sich durchschneiden, ein

Umstand der daher rührt, daß die Flächen des Sternes einwärtsgehende Winkel bilden und deßhalb auf einander selbst Schatten werfen, welche Theile der Schatten dann nicht mehr auf die Horizontalebene fallen können. Man konstruirt diese letzten Schatten nach den mehrfach angegebenen Verfahrungsarten.

Von den Schatten krummflächiger Körper.

31. Welch eine Vorstellung wir uns von dem Schatten eines Körpers zu machen haben, der durch eine krumme Oberfläche eingeschlossen wird, haben wir bereits in Art. 11 und 12 ausgeführt, und in Art. 13 die zu lösende Aufgabe deutlich ausgesprochen. Es handelt sich nämlich erstens darum, einer Fläche von gegebener Form und Stellung eine Kegelfläche zu umschreiben, deren Scheitel der leuchtende Punkt ist; zweitens die Berührungslinie dieser Kegelfläche mit der gegebenen Fläche zu konstruiren, wodurch man deren Trennungslinie von Schatten und Licht erhält, und drittens noch in vielen Fällen den Durchschnitt derselben Kegelfläche mit irgend einer andern gegebenen Fläche, und damit den Kontur des auf dieselbe fallenden Schlagschattens zu verzeichnen. Bei unendlicher Entfernung des leuchtenden Punktes und daher rührendem Parallelismus der Lichtstrahlen hat man es anstatt mit einer Kegelfläche, mit einer dieselbe in allen Beziehungen ersetzenden Cylinderfläche zu thun.

Für alle krumme Flächen, welche zu der Gattung der windischen oder aufwickelbaren, oder der Umdrehungs- oder Umhüllungsflächen gehören, haben wir in der darstellenden Geometrie besondere Methoden angegeben, wornach die verlangte Kegel- oder Cylinderfläche beschrieben werden kann. Wir wollen jetzt eine weitere ganz allgemeine Konstruktion derselben Aufgabe auseinandersetzen.

32. Bemerken wir, daß wenn irgend eine krumme Fläche von einer Kegelfläche oder von einer Cylinderfläche umhüllt und berührt wird, jede gerade Erzeugungslinie der Letzteren die erste Fläche tangiren müsse. Wird daher durch eine solche Erzeugungslinie eine Ebene gelegt, so wird diese die umhüllte Fläche durchschneiden, sie müßte sie denn tangiren. Im ersten Falle erhält man einen Schnitt der Fläche, an welchem die genommene gerade Erzeugungslinie Tangente ist.

Es werde nun vorerst der Oberfläche des beleuchteten Körpers eine konvex-gekrümmte Gestalt beigelegt, etwa eine sphäroidische, und angenommen, alles zu ihrer Erzeugung Erforderliche sei in der Projektion festgesetzt; das Gleiche sei mit der Stellung des leuchtenden Punktes geschehen, so wie alles dessen, was zur Bestimmung derjenigen Fläche erforderlich ist, auf welche der Schlagschatten der ersten fällt.

Durch den leuchtenden Punkt lege man sofort eine Ebene, welche die erstgenannte Fläche durchschneidet, und man ziehe durch den Lichtpunkt an die entstandene Durchschnittslinie die möglichen Tangenten, welches im vorliegenden Falle zwei seyn werden. Einleuchtenderweise können diese Tangenten als zwei Lichtstrahlen betrachtet werden, welche die Oberfläche des beleuchteten Körpers streifen, und ihre Berührungspunkte gehören daher der Trennungslinie von Schatten und Licht auf dieser Oberfläche an. Es kann nun geschehen, daß die Ebene der beiden Tangenten in ihrer Verlängerung noch jene Fläche durchschneidet, auf welche der Schatten der ersten fällt. Wenn dieser Schnitt stattfindet und konstruirt ist, so treffen die zwei Tangenten denselben in zwei Punkten, welche dem Umfange des gesuchten Schlagschattens angehören. Dies ganze Verfahren hat man so oft mit andern angenommenen Ebenen zu wiederholen, bis die zur Verzeichnung nöthige Anzahl von Punkten der Trennungslinie von Schatten und Licht, so wie des Schlagschattenumfanges gefunden ist.

33. Bei parallelen Lichtstrahlen ist die angeführte Konstruktion nur dahin umzuändern, daß die schneidenden Hülfsebenen, anstatt durch einen und denselben Punkt, nämlich den leuchtenden, zu gehen, parallel zu der Geraden seyn müssen, welche die Richtung der Strahlen anzeigt. Nachdem der Schnitt einer solchen Ebene und der ersten Fläche konstruirt ist, zieht man an diesen Schnitt zwei mit der Lichtrichtung parallele Tangenten und verfährt weiter bei diesen, wie im ersten Falle bei den konvergirenden Tangenten.

34. Daß diese Konstruktionsweisen sich ganz allgemein anwenden lassen, und nicht nur auf den Fall sphäroidischer Flächen, den wir nur mehrerer Anschaulichkeit wegen unterstellt haben, ist leicht einzusehen. Es ändert nichts, ob der beleuchtete Körper durch eine einzige krumme Fläche eingeschlossen werde oder durch Theile verschiedener Flächen; und ob selbst diese Theile stetig in einander laufen, oder durch ihr Zusammentreffen aus- und einspringende scharfe Kanten bilden. Man hat in diesem letzten Falle nun zu beachten, daß jene Kanten ganz oder theilweise der Trennungslinie von Schatten und Licht angehören können, und daß alsdann die, durch ihre verschiedenen Punkte gehenden Lichtstrahlen nicht mehr als geometrische Tangenten an die Oberfläche des beleuchteten Körpers betrachtet werden können, sondern, wie bei den polyedrischen Körpern, als bloße streifende Linien. Die angenommenen Hülfsebenen werden hier auch nicht immer stetige krumme Linien als Schnitte hervorbringen, sondern krumm- oder gemischtlinigte Polygone; an die man durch den leuchtenden Punkt, sehr oft keine eigentlichen Tangenten, sondern nur streifende Linien ziehen kann.

Die so erhaltenen Tangenten oder streifende Linien können auch das von ihnen berührte Polygon noch durchschneiden, was alsdann geschehen wird, wenn die verschiedenen Theile

des beleuchtenden Körpers Schatten auf einander selbst werfen. Jene Durchschnittspunkte gehören dann dem Kontur dieser eigenen Schlagschatten an.

Die einzige Bedingung durch einen gegebenen Punkt zu gehen oder parallel zu einer geraden Linie zu seyn, bestimmt die Lage der schneidenden Hülfsebenen noch keineswegs; so daß in jedem einzelnen Falle diese Lage noch auf eine Weise festgesetzt werden kann, welche die einfachsten, oder die genauesten Konstruktionen liefert, wie dies die Beispiele die wir geben, deutlich machen werden.

Konstruktion der Schatten runder Körper *).

Erstes Beispiel. Schatten einer Kugel. Tafel III.

35. Eine schwebende, oder an einem Faden aufgehängte Kugel ist durch die beiden über einander stehenden gleichen Kreise E F, *n m′ o* im Grund- und Aufrisse vorgestellt. Sie sei nach der Richtung (L, L′) beleuchtet, und es soll auf ihr die Trennungslinie von Schatten und Licht konstruirt werden, so wie der Schlagschatten, den sie auf die horizontale Projektionsebene M M wirft.

Trennungslinie von Schatten und Licht.

Wenn eine Kugel von einem Cylinder umhüllt wird, so ist die Berührungslinie der beiden Flächen jener größte Kreis der Kugel, dessen Ebene auf den geraden Erzeugungslinien des Cylinders senkrecht steht. Diese Eigenthümlichkeit, welche sich sehr leicht direkt beweisen läßt, kann man auch als besondern Fall des Satzes betrachten, daß jeder Meridian einer Umdrehungsfläche zugleich die Berührungslinie eines um dieselbe umschriebenen Cylinders ist, dessen Erzeugungslinien auf der Meridianebene senkrecht stehen (D. G. Art. 110). Bei einer Kugel aber kann jeder größte Kreis als ein Meridian genommen werden.

Die verlangte Trennungslinie von Schatten und Licht ist daher der Umfang jenes größten Kreises der gegebenen Kugel, dessen Ebene auf der Geraden (L, L′) senkrecht steht und um die Projektionen dieses Kreisumfanges zu verzeichnen, ist es nicht erforderlich, zu der oben dargelegten Methode der Hülfsschnitte zu greifen, oder zu der für die Umdrehungsflächen im Allgemeinen gegebenen Konstruktionsart des Art. 193 sqq. der D. G.

---

*) Wir verstehen hier unter der Benennung: runder Körper, solche, deren Oberflächen aus einer einzigen, oder aus Theilen verschiedener Flächen mit konvexer Krümmung bestehen, d. h. deren beide Hauptkrümmungen (D. G. Art. 438) ihre Konvexität nach einer und derselben Seite kehren. Hieher gehören die Kugel und alle kugelähnlichen (sphäroidischen) Flächen, die kreisförmigen Kegel, Cylinder ꝛc.

36. Nachdem man durch den Mittelpunkt (C, C′) der Kugel einen Lichtstrahl (C D, C′ *d*) d. h. eine Parallele zu der geraden (L, L′) geführt, nehme man eine Vertikalebene M′ M′ parallel zu der Geraden L an. Man projicire die Kugel auf diese Ebene, und denke sich dieselbe, wie jede vertikale Projektionsebene, auf die Horizontalebene niederlegt. Zu dem Ende errichte man aus C auf M′ M′ eine Senkrechte C C″, trage auf diese die Höhe *c* C′ des Mittelpunktes der Kugel über der Horizontalebene von *c*′ nach C′, und beschreibe aus letzterem Punkte mit dem Radius C E einen Kreisumfang. Man projicire auch den Punkt D der Horizontalebene nach *d*′; ziehe C″ *d*′, so ist dies die Projektion des Lichtstrahles (C D, C′ *d*) in der mit ihm parallelen Ebene M′ M′. Der verlangte größte Kreis, da er auf (C D, C″ *d*′) senkrecht stehen soll, muß auch auf der Ebene M′ M′ senkrecht stehen, daher seine Projektion auf dieser Ebene der auf C″ *d* senkrechte Durchmesser A′ B′ seyn wird. Der Grundriß dieses größten Kreises A′ B′ ist die Ellipse A E B F, deren große Axe der, auf C D senkrechte Durchmesser E F des mit dem Radius der Kugel aus C beschriebenen Kreises, und deren kleine Axe A B, die horizontale Projektion des Durchmessers A′ B′ ist. Irgend einen Zwischenpunkt (G, *g*) oder (G′, *g*) bestimmt man am einfachsten durch die Betrachtung, daß er auf einem horizontalen Kreise der Kugel (hier vom Durchmesser *m m*) liegt, der sich horizontal als der gleiche Kreis (μ G G′) projicirt.

Aus dem Grundrisse und der Vertikalprojektion, auf der Ebene M′ M′, leitet man sodann die Projektion der Trennungslinie von Schatten und Licht auf der Ebene M M ab, wobei wir nur bemerken wollen, daß die Höhen wie C″ *l*′ oder *c*′ *l*′ und C′ *l* oder *c l*, der gleichnamigen Punkte beider Vertikalprojektionen gleich seyn müssen. Die hier gefundene Projektion ist eine Ellipse, deren große Axe *n o* bestimmt ist, durch die Berührungspunkte des Kreises *o m*′ *n* und der zwei mit C′ *d* parallelen Tangenten. Den Punkten *n*, *o* entsprechen in horizontaler Projektion die Punkte N, O auf dem mit M M parallelen Durchmesser des größten Horizontalkreises der Kugel.

Konstruktion der besondern Punkte.

37. Man kann in der Vertikalprojektion auf M M noch folgende besondere Punkte bestimmen. Erstens diejenigen, wobei die Tangenten horizontal sind. Zweitens diejenigen, deren entsprechende Tangenten auf C′ *d* senkrecht sind. Drittens jene mit vertikalen Tangenten.

I. Die Punkte mit horizontalen Tangenten sind *b* und *a*, denen in horizontaler Projektion die Punkte B und A entsprechen, und auf der Ebene M′ M′ die Punkte B′, A′. Denn die Tangenten an den Punkten (B′, B), (A′, A) des die Trennungslinie von Schatten und Licht bildenden Kreises sind horizontal und daher ihre Vertikalprojektionen auf M M ebenfalls

horizontal. Man bestimmt übrigens die fraglichen Punkte wie alle andern durch die Betrachtung, daß sie auf einem horizontalen Kreise vom Durchmesser B′ *b*′ = A′ *a*′ liegen.

II. Die Punkte der Ellipse E′ *o* F′ *b* deren Tangenten auf C′ *d* senkrecht, also prallel mit *n o*, stehen sind die Enden ihrer kleinen Axe, oder jenes Durchmessers des Schatten und Licht trennenden Kreises, welcher auf *o n* senkrecht steht. Die zu letzterem gehörige Horizontalprojektion aber ist O N; aus ihr findet man auf der Ebene M′ M′ durch Errichtung der Senkrechten O *p*, N *q*, das Stück *p q* der Geraden A′ B′ welches hier der Projektion des Durchmessers *o n* entspricht.

Indem man den in A′ B′ projicirten Kreis um den Durchmesser A′ B′ gedreht, und auf die Vertikalebene M′ M′ umgelegt annimmt, so daß er mit dem Kreise A′ *m* B′ zusammenfällt, kommt der Durchmesser (*q p*, N O) nach *q*′ *p*′ (wobei *q q*′ und *p p*′ senkrecht auf A′ B′ gezogen sind). Man zeichne nun den auf *p*′ *q*′ senkrechten Durchmesser *s*′ *r*′, an dessen Enden die Tangenten parallel mit *p*′ *q*′ seyn werden; bringe den umgelegten Kreis wieder in seine vorige Lage, so kommen jene Endpunkte in der Projektion nach *s* und *r* zu liegen. Zieht man die Horizontalen *s s*″, *r r*″, trägt die Entfernung C″ *s*″ = C″ *r*″ von C′ nach R′ und S′, so treffen die Horizontalen R′ R, S′ S die Gerade C′ *d* in den Punkten R, S, für welche die Tangenten parallel mit *n o* oder senkrecht auf C′ *d* sind.

III. Die Punkte *v*′, *w*′ der Ellipse E′ *o b*, an denen die Tangenten dieser Linie eine vertikale Lage haben, sind die Enden desjenigen Durchmessers, welcher in dem Kreise, wovon diese Ellipse die Projektion ist, auf jenem Durchmesser senkrecht steht, dessen horizontale und vertikale Projektion in der Linie C C′ liegt. Man bestimme daher diesen Durchmesser in der Umlegung auf der Ebene M′ M′ und konstruire dann die Enden des auf ihm senkrechten Durchmessers wie im vorigen Falle. Nun aber schneidet die Vertikalebene C C′ die Ebene der Trennungslinie von Schatten und Licht einmal im Punkte (C, C′), dann schneidet sie unter andern die durch B gehende Horizontallinie derselben Ebene in einem Punkte, dessen horizontale Projektion *f* ist, und dessen Abstand von B durch die Entfernung *f* B angegeben wird. Der Schnitt beider Ebenen ist also die Gerade, welche durch C und *f* geht.

Man errichte daher B′ *f*′ = B *f* senkrecht auf A′ B′; ziehe C″ *f*′; auf diese, den senkrechten Durchmesser V′ W′. Aus V′ und W′ fälle man auf A′ B′ die Senkrechten V′ V, W′ W, und bestimme dann die, V und W entsprechenden Horizontal- und Vertikalprojektionen, *v*, *w* und *v*′ *w*′ gleich den übrigen Punkten der Trennungslinien von Schatten und Licht.

Schlagschatten der Kugel auf der Horizontalebene.

38. Der Schlagschatten, den die gegebene Kugel auf die horizontale Projektionsebene wirft, ist die Ellipse *a*′ *x b*′ *m*, welche den Durchschnitt des die Kugel umhüllenden Lichtcylinders

und jener Ebene bildet. Man konstruirt diese Linie, indem man durch die Punkte der Trennungslinie von Schatten und Licht auf der Kugel Lichtstrahlen zieht, und ihre Begegnungspunkte mit der Horizontalebene verzeichnet. Jede der beiden Vertikalprojektionen kann zu diesem Zwecke angewendet werden. Die auf der Ebene **M′ M′** giebt aber wegen der senkrechten Durchschneidungen zuverläßigere Konstruktionen.

Man wird bemerken, daß die Geraden **M** *m*, **X** *x* die Ellipse *a′ x b′ m* tangiren. Dies rührt daher, daß diese Geraden zugleich die Horizontalrisse zweier Berührungsebenen an den Lichtcylinder vorstellen, die auf der vertikalen Projektionsebene **M M** senkrecht stehen, und die sich darauf als die Geraden *n* **M**, *o* **X** projiciren. Dieselbe Bemerkung gilt von den Geraden **A″** *a′*, **M′** *b′*.

Zweites Beispiel. Schatten einer Hohlkugel. Tafel IV, Fig. 1.

39. Wenn man eine beleuchtete Kugelfläche sich als selbstständige physische Fläche denkt, und nicht als Oberfläche eines Körpers, und man zerlegt sie nach ihrer Trennungslinie von Schatten und Licht in zwei Hälften, so wird man leicht einsehen, daß der eine, außen erhellte Theil innen dunkel seyn müsse, so wie, daß der außen im Schatten liegende Theil auf seiner innern Seite erhellt seyn werde. Theilt man die Fläche nach anderer Richtung als nach ihrer Schattengrenze in zwei Theile, so kann jedes Stück sowohl auf seiner äußern als auf seiner innern Seite einen erhellten und einen dunkeln Theil haben. Auf der innern, der hohlen Seite, wird der erhellte Theil da seinen Anfang nehmen, wo die außen gezeichnete Trennungslinie den Rand des Kugelstückes durchschneidet. Allein jene Trennungslinie existirt nur auf der konvexen Außenseite; auf der innern muß nothwendig von den oben genannten Punkten an ein Schlagschatten entstehen.

Diese Bemerkungen gelten nicht allein von der Kugel, sondern von allen hohlen Körpern mit konvex gekrümmter Oberfläche.

40. Es stelle die Kreisfläche **G H C F** den Grundriß einer halbkugelförmigen Aushöhlung vor; (**D**, *d*) ihren Mittelpunkt. Eine vertikale Projektionsebene durch diesen Mittelpunkt gehend und parallel der Richtung des Lichtes enthält: die Horizontallinie **X X** des Bodens; einen größten Halbkreis der Aushöhlung, dessen Halbmesser *c d* = **C D**; einen Lichtstrahl **L′**, dem die Gerade **L** des Grundrisses entspricht. Zieht man durch **D** eine Senkrechte auf **L**, so gehören deren Endpunkte **F**, **G**, auf der Außenseite der Kugel, ihrer Trennungslinie von Schatten und Licht an. Die eine Hälfte **G H C F** des Randes der Kugel wirft daher ihren Schatten in das Innere. Diese zu konstruiren, werde die Kugel durch vertikale Ebenen parallel mit **L** geschnitten. So ist der Halbkreis *c f e* die vertikale Projektion des Schnittes der-

jenigen von diesen Ebenen, welche durch (D, *d*) geht. Die Parallele mit L′ durch *c* trifft diesen Kreis in *e*, welchen Punkt man auf die Gerade C D nach E projicire, wo dann die Punkte *e* und E der vertikalen und horizontalen Projektion des gesuchten Schlagschattens angehören werden. Arbeitet man eben so bei andern Punkten (H, *h*) oder (H′, *h*) des Bogens G H C F, so findet man weitere Punkte (*i*, I), (*i*, I′) derselben Schattengrenze.

41. Die Punkte *d*, *i*′ *e* werden alle in gerader Linie liegen, woraus man schließt, daß der Schlagschatten, den der Rand der hohlen Halbkugel in sie selbst wirft, eine ebene Kurve sei und zwar da ihre Ebene den Durchmesser (F G, *d*) enthält, ein größter Kreis der Kugel, dessen Ebene, gleich der des Randes G H C F, auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht. Die horizontale Projektion des Schattens ist eine halbe Ellipse mit F G als großer und D E als halber kleiner Axe. Der Umstand, daß der Schatten, den der ebene Rand einer Halbkugel in ihr Inneres wirft, ein, dem Rande gleicher Kreis der Kugel sei, findet immer Statt, ob jener Rand ein größter oder ein kleiner Kreis der Kugel ist.

In der That ist dieser Schlagschatten der Durchschnitt der Kugel und eines Cylinders, der als Basis den Kugelrand hat; betrachtet man blos jene Stücke der Erzeugungslinien des Cylinders (der Lichtstrahlen), die im Innern der Kugel sich befinden, so sind dies lauter parallele Sehnen derselben. Eine auf ihnen senkrechte Diametralebene der Kugel schneidet sie alle in ihren Mitten, daher ihre Enden zwei, in Bezug auf diese Diametralebene symmetrische Figuren bilden; aber die eine dieser Figuren liegt in einer Ebene, daher auch die andern. *)

Drittes Beispiel. Schatten eines hohlen Cylinders. Tafel IV, Fig. 2.

42. Die Figur 2 der Tafel IV. zeigt Grundriß und vertikalen Schnitt einer Aushöhlung mit gerader cylindrischer Oberfläche. Der Kreis I E H F der Horizontalebene ist die Basis dieses Cylinders, eine durch seine Axe parallel mit dem Lichte gelegte Ebene schneidet ihn nach dem vertikal stehenden Rechteck $i\,h\,h''\,i'$, worin $i\,h = i'\,h'' =$ I H, und $i\,i'$ gleich der Tiefe der Aushöhlung. Dieselbe Ebene enthält einen Lichtstrahl L′, dessen horizontale Projektion L in der Geraden I H liegt. **)

Wenn man durch den leuchtenden Punkt, oder in der Richtung der parallel einfallenden Lichtstrahlen, an die Oberfläche irgend eines beleuchteten Körpers eine tangirende Ebene legt, so gehört ihr Berührungspunkt der Grenzlinie ihres Schattens an. Ist aber die gegebene

---

*) Auch bei der Beleuchtung, welche von einem einzigen Punkte ausgeht, findet dieselbe Eigenthümlichkeit statt, wie aus D. G. Art. 275 erhellt.

**) Wir fügen nicht mehr hinzu, daß mit diesem Strahle parallel die Beleuchtung des gegebenen Körpers statt haben soll.

Oberfläche aufwickelbar, so berührt die geführte tangirende Ebene sie nach der ganzen Ausdehnung einer ihrer geraden Erzeugungslinien, und diese Gerade ist somit auch Trennungslinie von Schatten und Licht.

43. Zwei mit L parallele Tangenten berühren den Kreis **I H E** in **E** und **F**, den Enden des auf **L** senkrechten Durchmessers. Diese Punkte **E** und **F** sind die horizontalen Projektionen zweier Erzeugungslinien des Cylinders, zugleich Berührungslinien zweier mit den Lichtstrahlen parallelen tangirenden Ebenen. Diese Erzeugungslinien wären daher auf dem vollen Cylinder Trennungslinien von Schatten und Licht. Bei dieser Annahme nämlich würde die in **E I F** projicirte Hälfte der Cylinderfläche erhellt, die in **E H F** projicirte aber im Schatten seyn.

Umgekehrt also fängt bei dem hohlen Cylinder in (**E**, *e*), (**F**, *e*) das Licht an einzudringen, oder, wenn man will, hier nimmt der entstehende Schlagschatten seinen Anfang. Dessen vertikale Projektion zu erhalten, lege man durch beliebige Punkte (**I**, *i*), (**K**, *k*) des Randes (**E I F**, *e i*) vertikale Ebenen parallel mit **L**. Diese Ebenen schneiden die vertikale Cylinderfläche nach ihren Erzeugungslinien (**H**, *h'' h*), (**G**, *g' g*), sie enthalten aber auch Lichtstrahlen (**I H**, *i h'*), (**K G**, *k g'*). Diese Strahlen treffen ihre zugehörigen Schnitte in Punkten, deren vertikale Projektionen *h' g'* der gleichnamigen Projektion des gesuchten Schlagschattens angehören. Die horizontale Projektion desselben Schattens ist natürlicherweise der Bogen **E H F**.

Man wird finden, daß alle Punkte *e*, *g' h'* in gerader Linie liegen, daß also der Schlagschatten, den der Rand des Cylinders in sein Inneres wirft, eine ebene Kurve, und zwar eine halbe Ellipse sei.

44. Der in Rede stehende Schlagschatten ist der Durchschnitt des gegebenen geraden Cylinders mit einem schiefen Cylinder, der als Basis den Kreis (**I F H E**, *i h*) hat, und dessen Erzeugungslinien mit den Lichtstrahlen parallele Gerade sind. Es ist aber hier der in Art. 308 der D. G. vorgesehene Fall, wo der Durchschnitt zweier Cylinder aus zwei ebenen Kurven besteht.

Da aber bei der vorliegenden Anordnung die Ebene der Schattenkurve die Gerade (**E F**, *e*) enthält, die auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht, so ist sie selbst auf dieser Ebene senkrecht und projicirt sich darauf als gerade Linie. *)

---

*) Wir rathen Anfängern, das gegebene Beispiel auch so zu zeichnen, daß die vertikale Projektionsebene nicht mit dem Lichte parallel steht.

Viertes Beispiel. Schatten einer Wolfsgrube.

45. Wolfsgruben nennt man in der Feldbefestigungskunst ausgegrabene Löcher in Form von abgestumpften umgestürzten Kegeln. Sie erhalten oben eine Weite von fünf bis sechs Fuß, und eine Tiefe von vier bis fünf Fuß. Die ausgeworfene Erde wird an den Rändern aufgeschüttet und der Boden der Grube mit einem starken oben zugespitzten Pfahle versehen. Die Wolfsgruben werden gewöhnlich zwölf bis zwanzig Fuß vor den äußeren Grabenrand gelegt. Es dürfen nicht leicht weniger als drei parallele Reihen angeordnet werden, so daß die Gruben übers Kreuz und zwei Fuß von einander entfernt zu stehen kommen. (Siehe Reiche's Baupraktik für Feldingenieure.)

Figur 3, Tafel IV. stellt in *a* den Grundriß und in *b* den vertikalen Durchschnitt einer solchen Grube dar.

Der Kreis **C G D H** ist der Durchschnitt der umgestürzten Kegelfläche mit der Oberfläche des Bodens, welche hier als horizontale Projektionsebene angenommen wird; (**S**, *s* **A**) die Axe der Kegelfläche.

Eine durch den Diameter **C S D** gehende Vertikalebene schneidet die Bodenoberfläche nach der Geraden **X X**, und die Oberfläche der Grube nach der, in Bezug auf (**S**, *s* **A**) symmetrischen Figur $c\ \tau\ \sigma\ d$, deren verlängerte Seiten in s den Scheitel des ganzen Kegels bestimmen. $\tau\ \sigma$ ist die vertikale Projektion der kleinen Basis des abgestumpften Kegels, dessen horizontale Projektion der mit **C F D** konzentrische Kreis $\varrho\ \psi$ (Fig. 6) vorstellt.

46. Eine Gerade (**L S**, **L'** *s*) parallel mit den Lichtstrahlen, durch den Scheitel des Kegels gelegt, schneidet die horizontale Projektionsebene in (*m*, **M**). Zwei aus **M** an den Kreis **C D H** gezogene Tangenten berühren diesen in **I** und **F**; die Radien **I S**, **F S** dieser Punkte sind die horizontalen Projektionen zweier Erzeugungslinien der Kegelfläche, Berührungslinien derselben mit den durch (**L S**, **L'** *s*) gehenden tangirenden Ebenen (D. G. Art. 179), und folglich die Projektionen ihrer Trennungslinien von Schatten und Licht. (Art. 42.)

Auf dem vollen Kegel wäre also der in **I S F** projicirte Theil seiner Fläche erhellt, der andere im Schatten. Umgekehrt ist es in dem hohlen Kegel, allein der entstehende Schlagschatten beginnt an den Pnnkten (**I**, *i*), (**F**, *f*). (Art. 39).

Der Bogen **I G F** ist der schattenwerfende Theil. Der von ihm herrührende Schlagschatten wird als Durchschnittslinie der Kegelfläche mit dem aus Lichtstrahlen gebildeten Cylinder konstruirt, indem man die schneidenden Hülfsebenen sämmtlich durch die Gerade (**L S**, **L'** *s*) gehen läßt. (D. G. Art. 321.)

Eine dieser Ebenen, innerhalb der zwei oben genannten tangirenden Ebenen hat als Riß auf der Horizontalebene eine Gerade, welche, wie **M** $\alpha\ \beta$, durch **M** geht, und den Kreis **C F D** in zwei

Punkten α, β durchschneidet. Der letzte Punkt bestimmt eine Erzeugungslinie (β S, $\beta' s$) des Kegels, der erste eine Erzeugungslinie ($\alpha\, v$, $\alpha'\, v'$) des Cylinders (einen Lichtstrahl), die beide, weil sie in einer Ebene liegen, einander durchschneiden und so einen Punkt (v, v') des gesuchten Schlagschattens angeben.

Man wiederholt dies mit weiteren Hülfsebenen so oft, bis die zur Verzeichnung der Kurve (F v r I, f v' r' i) nöthige Anzahl von Punkten gefunden ist. Den Punkt r, den tiefsten des Schlagschattens, leitet man aus seiner zuerst gefundenen Vertikalprojektion r' ab, wie die angegebenen Konstruktionen zeigen.

47. Die gefundene Kurve ist nur so weit reeller Umriß des Schlagschattens, als sie zwischen den zwei Horizontalebenen $c\,d$ und $\tau\,\sigma$ der beiden Basen des Kegels liegt. Sie durchschneidet die Horizontalebene $\tau\,\sigma$ der untern Basis des Kegels in zwei Punkten, deren Projektionen 6 und 7 sind. Zwischen diesen Punkten läuft der Schatten des Randes I C F auf jener untern Ebene hin und bildet einen Kreisbogen von einem Radius = S C. Denn der Rand (C I D F, $c\,d$) und sein Schlagschatten auf der Horizontalebene $\tau\,\sigma$ können betrachtet werden als die Schnitte von zwei parallelen Ebenen in einem schiefen Cylinder, sie sind folglich gleiche Kurven. Nun aber fiele der Schatten des Mittelpunktes (S, A) auf der verlängerten Ebene $\tau\,\sigma$ nach (A′, a) und hier ist der Mittelpunkt für den gesuchten Kreisbogen von einem Radius = C S. Das Stück dieses Umkreises zwischen den Punkten 6 und 7 vollendet den Umfang der horizontalen Projektion des Schlagschattens im Innern des Kegels.

Es könnten übrigens die Punkte des Kreisbogens 6 7 auch ganz nach der Methode des Art. 46 konstruirt werden, indem man die Schnitte suchte, welche die angewendeten Hülfsebenen in der Ebene $\tau\,\sigma$ (Fig. b) machten.

Zweite Konstruktionsart des Schlagschattens.

48. Die Kurve (I r v F, i r' v' f) ist eine ebene Linie, ein elliptischer Bogen *). Die Gerade F I liegt in ihrer Ebene, und da diese Gerade, per construct., auf der L S senkrecht steht, so kann man daraus schließen, daß in der Projektion auf einer mit der (L S, L′s)

---

*) Diese Eigenthümlichkeit, so wie das Analoge in den zwei vorhergehenden Beispielen, daß nämlich der Schlagschatten, den der ebene Rand eines hohlen Kegels, Cylinders oder einer hohlen Kugel auf seine eigene Fläche wirft, immer eine ebene krumme Linie bilde, ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Eigenschaft aller Flächen der zweiten Ordnung, welche darin besteht, daß wenn zwei solche Flächen sich nach einer Linie von zwei Zweigen durchschneiden und ein Zweig ihres Durchschnittes ist eine ebene Kurve, so ist es auch der andere. Die genannten Schlagschatten sind aber die Durchschnitte von Flächen zweiter Ordnung mit Cylindern, welche eine Linie der zweiten Ordnung, nämlich ihre Basis, mit ihnen gemein haben.

und der Axe (S, *s* A) parallelen Ebene, die genannte Kurve sich als gerade Linie darstellen werde.

Man kann demnach den Schatten des gegebenen Hohlkegels konstruiren, indem er als Durchschnitt der Fläche mit einem schiefen Cylinder betrachtet wird, wie oben gezeigt worden; oder aber als Durchschnitt der Kegelfläche und einer Ebene. Zu letzterem Zwecke ziehe man S*s*′ A′ = S*s*A senkrecht auf LS und zeichne an diese, als Axe, dieselbe Figur wie Fig. 3 *a*. Dadurch ist die mit dem Lichte parallele Vertikalprojektion des Kegels gefunden, und zugleich der Schnitt desselben durch die Ebene L M G H. Der Punkt M projicirt sich nun auf die Gerade *g h* nach *m*′; es ist also *m*′ *s*′ der Lichtstrahl (L S, L′ *s*) in der Ebene der Fig. 3 *c*. Die Parallele mit *m*′ *s*′ durch den Punkt *g* trifft die Gerade *h s*′ in *r*″, einem Punkte, dessen horizontale Projektion in *r* liegt. Die Gerade *e*′ *r*″ ist daher die vertikale Projektion des Schlagschattens den der Bogen (I G F, *g e*′) auf die Kegelfläche selbst wirft; oder auch der Vertikalriß der Ebene jenes Schattens, und die Gerade 5, 6, 7 ist der Horizontalriß derselben.

Die Begegnungspunkte 6, 7 dieses Risses mit dem Kreise ϱ 7 ψ 6 sind zwei Punkte der Kurve I *r v* F, deren entsprechende Vertikalprojektionen in der Ebene der Figur 3 *b* auf der Geraden τ σ liegen.

Eben so schneidet eine andere beliebig geführte Horizontalebene 1. 2, Fig. 3 *c*, den Kegel nach einem Kreise (1 2, Fig. *c*′ 4 *v* 3, Fig. *e*, 1′ 2′ Fig. *b*) und die Ebene der Schattenkurve (*e*′ 5, 5 6) nach einer Geraden (*v*″, *v*″ λ *v*), deren Zusammentreffen mit jenem Kreise wiederum zwei Punkte (*v*″, λ, λ') und (*v*″, *v*, *v*′) der Kurve (*e*′ *r*″ Fig. *c*, I *r v* F Fig. *a*, *i r*′ *v*′ *f* Fig. *b*) giebt.

Konstruktion der Tangenten an die Grenzlinie des Schlagschattens.

49. An einem Punkte *v* der Ellipse F *v r* I findet man die Tangente dieser Kurve, wenn man sie betrachtet, als Durchschnitt der tangirenden Ebenen, welche durch diesen Punke an den Kegel und Cylinder geführt sind. Aber die tangirende Ebene an den Kegel hat als Horizontalriß die Tangente in β an dem Kreis C G D; und die tangirende Ebene an dem Cylinder hat die Tangente in α an denselben Kreis ihrerseits als Horizontalriß, es ist daher die Gerade ε v horizontale Projektion des Durchschnitts der zwei tangirenden Ebenen, d. h. die verlangte Tangente. An den Punkten I oder F fallen die Horizontalrisse der zwei tangirenden Ebenen in eins zusammen. Aber die Tangente der Ellipse an diesem Punkt liegt auch in der Ebene der Ellipse, deren Riß auf die Ebene τ σ die Gerade 6. 7 ist; und da die tangirende Ebene des Kegels am Punkt I, auf derselben Ebene τ σ, als Riß die Tangente in ϱ an den Kreis ϱ 6 7 hat, welche der Tangente in I an den Kreis C G D parallel ist, so giebt der Begegnungspunkt *j* jener zwei Risse einen zweiten Punkt für die Tangente in I.

Fünftes Beispiel. Schatten eines Kuppelgewölbes. Tafel V.

50. Ein von einem geraden Cylinder eingeschlossener Raum wird durch ein sphärisches Kuppelgewölbe überdeckt, und in seinem Scheitel durch eine runde Oeffnung, eine sogenannte Laterne erhellt. Man giebt die Hälfte dieses Baues im Schnitt durch eine vertikale Ebene, und verlangt den Schatten desselben bei gleichfalls gegebener Richtung der Lichtstrahlen.

Eine Ebene F G, parallel zur vertikalen Projektionsebene enthält die Figur $a' a f i i' h u t f'$, welche durch ihre Umdrehung um die Axe $(C, c' c'')$ die innere Fläche dieses Körpers erzeugt. Der Bogen $a f$, dessen Mittelpunkt c in der Umdrehungsaxe liegt, beschreibt ein Stück einer Kugelfläche; die schiefe Linie $f i$ des Gesimsprofiles eine Kegelzone; die vertikalen Linien der Figur cylindrische Flächen; und der Bogen $i' h$ ein Stück einer ringförmigen Fläche.

Wir beginnen die Reihe der auszuführenden Konstruktionen bei dem Schlagschatten des sphärischen Theiles der Figur. Abgesehen von der Oeffnung $a b$ ist dieser Theil eine Viertelskugel, deren Mittelpunkt (c, C) in der Horizontalebene $f g$ liegt. Zur bequemen Konstruktion betrachte man für einen Augenblick den Aufriß $f b g$ dieser Hohlkugel als eine horizontale Projektion, und man verzeichne eine vertikale Hülfsprojektion parallel mit der Geraden l, wodurch die Aufgabe ganz auf die, Art. 40 zurückgebracht wird. Um Raum zu ersparen ist in der vorliegenden Zeichnung die Hülfsprojektion auf eine Ebene $k k'$ gemacht worden, die parallel mit dem Lichte durch den Mittelpunkt (c, C) gelegt ist. *)

Die Ebene $k k'$ enthält einen durch (c, C) gehenden Lichtstrahl, welcher in seinem Punkte k um die Entfernung $\varkappa \varkappa'$ über die Projektionsebene erhaben ist. Wird die Gerade $k l' = \varkappa \varkappa'$ senkrecht auf $k c$ errichtet und $l' c$ gezogen, so hat man in dieser Linie den durch (c, C) gehenden Lichtstrahl, in der Lage, die er nach der Umlegung der Ebene $k k'$ nehmen muß.

Der Schlagschatten nimmt seinen Ursprung in d, dem Berührungspunkte der zu $k k'$ parallelen Tangente an den Kreis $f' b g$ (denn diese Tangente ist die Projektion einer dem Lichte parallelen tangirenden Ebene an die Kugel). Ein Lichtstrahl $b e$, durch irgend einen Punkt b des schattenwerfenden Randes $d b a f$ gezogen, liegt in einer der Projektionsebene senkrechten Ebene, welche die Kugelfläche nach einem Kreise vom Durchmesser $b e$ schneidet; der Begegnungspunkt dieses Kreises mit dem genommenen Lichtstrahle liegt im Umfange des gesuchten Schlagschattens. Aber der Kreis projicirt sich auf die Ebene $k k'$ nach $b' \varepsilon' e'$, der Punkt b nach b'; der durch b gehende Lichtstrahl nach $b' \varepsilon'$; daher ist ε' die vertikale und ε die horizontale Projektion des vorhin genannten Punktes.

51. Die Kurve $d \varepsilon \delta$, welche man durch die Konstruktion mehrerer Punkte wie ε bestimmt, ist

*) Wenn diese Anordnung einige Schwierigkeit in der Anschauung verursachen sollte, so rücke man die Hülfsprojektion parallel mit der Geraden $c d$ in den oberen, rechter Hand liegenden Theil des Zeichnungsblattes.

bekanntlich ein elliptischer Bogen, Projektion eines größten Kreisstückes der Kugel (Art. 41). Auf der Vertikalebene $k\,k'$ ist die Gerade $c\,\varepsilon'\,\vartheta$ Projektion derselben Linie. Ihre Ausdehnung erstreckt sich bis zum Punkte δ, welcher in dem Durchschnitte des horizontalen Kreises $f\,g$ liegt und des schiefen Kreises, dessen Ebene die Geraden $c\,d$, $c\,\vartheta$ enthält. Will man diesen Punkt δ konstruiren, so wird aus einem beliebigen Punkte g des Kreises $f\,g$ auf $k\,k'$ eine Senkrechte errichtet, bis zu ihrem Zusammentreffen in γ mit der verlängerten $c\,\vartheta$. Die Entfernung $\gamma'\,\gamma$ hierauf von g nach g' getragen und $c\,g'$ gezogen. Diese Gerade ist der Durchschnitt der Ebene des Schattenkreises ($d\,\varepsilon\,\delta$, $c\,\vartheta$) und des Horizontalkreises $f\,g$ nachdem der letztere um seinen horizontalen Durchmesser $f\,g$ gedreht, und auf den Kreis $f\,b\,g$ umgelegt worden. Aus dem Begegnungspunkte δ' der Geraden $c\,g'$ und des letztgenannten Kreises wird auf $f\,g$ die Senkrechte $\delta'\,\delta$ gefällt und somit der Punkt δ festgesetzt. Die Parallele aus δ zu der Projektion des Lichtes bestimmt auf dem Kreise $f\,b\,g$ den Punkt η, dessen Schlagschatten nach δ fällt. Es ist also $\delta\,\eta$ der Theil des Kugelrandes, dessen Schatten durch $d\,\varepsilon\,\delta$ vorgestellt wird; der Schatten des Bogens $\eta\,k\,f$ fällt auf die cylindrische Wand der Nische und auf die Theile des Gesimses. Mit letzterm werden wir uns nachher befassen; die Projektion des ersteren aber, der Durchschnittslinie des vertikalen Cylinders F M' G mit dem Schattencylinder, welcher als Basis den Kreis $f\,b\,g$ hat, ist die Kurve $\delta\,\mu\,\varphi$. Ein Lichtstrahl durch irgend einen Punkt (m, M) des Bogens $f\,k\,\eta$ gezogen durchschneidet den vertikalen Cylinder F M' G in einem Punkte (M', μ) dessen vertikale Projektion μ in der Kurve $\delta\,\mu\,\varphi$ liegt.

52. Die Linien $\varphi\,\mu\,\delta$ und $\delta\,\varepsilon\,\delta$ werden sich in dem Punkte δ berühren, denn diese Linien sind zu betrachten als die schiefe Projektion eines vertikalen Kreises auf zwei Flächen, nämlich dem vertikalen Cylinder und der Viertelskugel, die sich beide selbst nach einem Kreise berühren. Wollte man in δ die, beiden Linien gemeinsame Tangente verzeichnen, so wäre diese als Durchschnittslinie anzunehmen der tangirenden Ebene an den schiefen Cylinder, und der Ebene des Kreises ($d\,\varepsilon\,\delta$, $c\,\vartheta$); die tangirende Ebene hat aber als Riß auf der vertikalen Projektionsebene die Tangente, welche in η an den Kreis $f\,b\,g$ gezogen wird; die Ebene des Schattenkreises ($d\,\varepsilon\,\delta$, $c\,\vartheta$) hat als Vertikalriß die Gerade $c\,d$; der Begegnungspunkt dieser zwei Geraden würde die verlangte Tangente bestimmen. *)

53. Eine durch die Kante (F, $f'\,f$) parallel mit dem Lichte gelegte Vertikalebene F F' schneidet den Cylinder F M' G nach der vertikalen Linie $\varphi'\,\varphi$, dem Schatten jener Kante. Diese Vertikale $\varphi'\,\varphi$ berührt die Krumme $\varphi\,\mu\,\delta$ in φ, weil die Gerade und der Kreis, dessen Schatten sie sind, sich selbst in f berühren, und weil allgemein die rechtwinkligen, schiefen oder polaren

*) Man hat diese Konstruktionen nicht verzeichnet, weil die angeführten Linien sich zu weit außerhalb des Rahmens unserer Zeichnung erst durchschneiden.

Projektionen zweier Linien die sich berühren, auf irgend einer Fläche, immer wiederum zwei sich berührende Linien sind.

Von den bis jetzt erhaltenen Schatten wäre im Grundrisse nur der auf der Kugelfläche zu verzeichnen. Der Punkt b ist im Grundrisse in B; der Grundriß E seines Schattens liegt auf der horizontalen Projektion B E eines Lichtstrahles und senkrecht unter seiner schon gefundenen Vertikalprojektion ε. Der Punkt D entspricht dem Punkte d des Aufrisses und $\varDelta$ dem Punkte δ. In letzterem Punkte werden sich die Linie $\varDelta$ E D und der Kreis F M′ G berühren.

Schatten des Kranzgesimses.

54. Auf den kegelförmigen Theil des Gesimses fällt der Schatten eines Bogens vom Kreise $f\,b\,g$; es ist dies der Durchschnitt der Kegelfläche mit dem schiefen Schattencylinder. Durch den Scheitel (s, C) des Kegels wird ein Lichtstrahl (C λ, $s\,\lambda'$) (eine Parallele mit den Erzeugungslinien des Cylinders) gelegt, und durch diesen Strahl schneidende Hülfsebenen angenommen. Die Risse aller dieser Hülfsebenen auf der Horizontalebene $f\,g$ müssen durch den Punkt λ gehen, und ihre Vertikalrisse durch s. Es sei $\lambda\,\varrho$ ein solcher Horizontalriß; wird dessen Begegnungspunkt R mit F G nach r auf die Horizontale $f\,g$ projicirt, und $r\,s$ gezogen, so ist diese Gerade der zu $\lambda\,\varrho$ gehörige Vertikalriß. Die Eben (R ϱ, $s\,r$) schneidet die Kegelfläche vom Scheitel (s, c) nach einer Geraden (ϱ C, $\varrho'\,s$); sie schneidet den Schattencylinder nach einer, durch (p, P) gehenden Parallelen ($p\,p'$, P P′) zu (L, l); der Begegnungspunkt (p', P′) beider Schnitte ist ein Punkt des gesuchten Schattens ($p'\,\delta\,\pi$, P′ $\varDelta\,\Pi$). Dieser Schatten ist natürlicherweise nur in seiner Ausdehnung auf der Zone $f\,g\,i$ wirklich vorhanden.

Auf den Fries des Gesimses, einen vertikalen Cylinder, fällt auch noch Schatten vom Bogen $\eta\,m\,f$; man konstruirt dessen Vertikalprojektion ganz auf gleiche Weise wie die Linie $\delta\,\mu\,\varphi$.

Die kreisförmigen Ränder des Gesimses, welche in den Horizontalebenen $h\,h$, $u\,u$, $t\,t$ liegen, werfen Schatten auf die unter ihnen befindlichen cylindrischen Theile. Diese Schatten sind demnach Durchschnitte zweier Cylinder. Durch einen Punkt (1, 1′) des Randes $t\,t$, wird ein Lichtstrahl (1 2, 1′ 2′) gelegt, sein Begegnungspunkt (2, 2′) mit dem Cylinder F M′ G gehört dem Schlagschatten des Randes auf letzterer Fläche an. In ähnlicher Weise werden die Punkte des auf der Fläche $u\,t\,t\,u$ liegenden Schlagschattens gefunden.

Der Rand $i'\,m$ wirft Schatten in das Innere der Hohlkehle (des von dem Kreisbogen $i'\,h$ erzeugten Stückes einer Ringfläche); man konstruirt denselben nach der allgemeinen Methode, durch Anwendung schneidender Hülfsebenen. Wir werden übrigens im nächsten Abschnitte diesen Fall noch ausführlich behandeln.

Es bleibt nun noch der Schatten zu verzeichnen, den der Rand *f i i' h u t* des Gesimses, welcher in der Ebene F G liegt, auf den Cylinder F M' G wirft; eine Aufgabe, für welche beinahe alle nöthigen Konstruktionslinien auf der Tafel gezogen sind.

Schatten der Laterne.

55. Der Schatten, welcher von der cylindrischen Oeffnung (A N B, *a a' b*) herrührt, fällt zum Theil auf das sphärische Gewölbe, zum Theil auf die Wände der Oeffnung selbst.

Alle durch den Kreis (*a b*, A N B) gehenden Lichtstrahlen bilden einen schiefen Cylinder, dessen Durchschnitt mit der Kugelfläche (F M' G, *f b g*) der jener Kreis angehört, wiederum ein Kreis von einem Durchmesser = *a b* ist (Art. 41). Ein Lichtstrahl durch einen Punkt des Randes *a b* gezogen, hat als Projektion eine Gerade wie 3. 5. Die projicirende Ebene dieses Strahles schneidet die Kugel nach einem Kreise, dessen Durchmesser gleich ist der Geraden 4.5, und der sich auf die Ebene *k k'* nach 4' 3' 5' projicirt. Der Punkt 3, welcher zu gleicher Zeit in den zwei Kreisen liegt, die sich nach *a b* und 4. 5 projiciren, hat seine Projektion auf der Ebene *k k'* in 3'. Durch 3' wird eine Parallele 3' 6' mit *l' c* gezogen, aus deren Begegnungspunkt 6' mit dem Bogen 4'3'5', auf *k k'* die Senkrechte 6' *b* errichtet, und man hat in ihrem Zusammentreffen mit der 4. 5 einen Punkt 6, welcher als Schatten dem Punkte 3 entspricht.

Der Schatten der Kante (A, *a a'*) projicirt sich horizontal in die Parallele zu L, welche durch A gezogen wird. Dieser Schatten ist also ein Bogen eines Vertikalkreises der Kugel, dessen Verzeichnung nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Eine mit L parallele Tangente an den Kreis A N B bestimmt durch ihren Berührungspunkt Z den Bogen (A Z, *a z*) des oberen Randes der Laterne, dessen Schatten *α z'* in folgender Weise konstruirt werden kann: die projicirende Ebene *z z'* eines durch einen Punkt *z* geführten Lichtstrahles schneidet die Kugelfläche in einem Kreise *ζ' ω*, wobei *ζ'* die Projektion des Punktes *ζ* ist. Der Punkt *z*, dessen Tiefe hinter der Projektionsebene durch *z z'* ausgedrückt wird, projicirt sich nach *ψ*, wobei *ψ' ψ = z' z*; die Parallele *ψ ω* zu *l' c* bestimmt den Punkt *ω'* und damit seinen korrespondirenden *z'* auf der Geraden *z z'*. Der Bogen *a z'* ist die Projektion einer Kurve von doppelter Krümmung, der Durchschnittslinie einer Kugel und eines schiefen Cylinders.

Es bleibt nun noch die Projektion *z m* des Schattens zu verzeichnen, welchen der Rand (*a z*, A Z) auf die cylindrische Fläche der Laterne wirft, eine Konstruktion, bei der wir ganz auf die Aufgabe 3 d. A. verweisen.

Die Verzeichnung der verschiedenen Schatten im Grundrisse bedarf weiter keiner Erläuterung.

Man wird aber bemerken, daß der Grundriß der Tafel V. nicht behandelt ist als eine Ansicht des Körpers von oben, sondern als von unten hinauf gesehen.

56. Wir wollen bei vorstehender Aufgabe noch Veranlassung nehmen, den Schatten einer sphärischen Nische im Eck einer Mauer zu erklären. Die Figur *a* Tafel V. zeigt den horizontalen Schnitt und Aufriß einer derartigen Nische. Der Theil ihrer Oberfläche, welcher uns beschäftigt, besteht aus dem Achttheile einer Kugel, eingeschlossen von einer Horizontalebene *c d*, und zwei unter sich rechtwinkligen Vertikalebenen C D, C A, von denen sämmtlich die Fläche nach Bögen größter Kreise geschnitten wird.

L C und *l c* sind die Projektionen eines durch den Mittelpunkt (C, *c*) gehenden Lichtstrahles.

Die parallele Tangente zu *l c* an den Kreisbogen *e d* berührt denselben in *b*, welchen Punkt man auf C D nach B projizirt, und somit den Anfang des Schlagschattens auf der Seite C D bestimmt.

Eine Tangente an dem Bogen (C A, *e c*) parallel mit der Projektion des Lichtes auf der Ebene C A zeigt auch in dieser Ebene den Ursprung (*f*, F) des Schattens. Aber der Punkt (C, *c*) des Lichtstrahles (L C, *l c*) liegt schon in der Ebene C A; ein zweiter Punkt (L, *l*) desselben Strahles projicirt sich nach λ, einen Punkt, der, nach Umdrehung der Ebene C A λ um die vertikale Axe C, nach *l'* zu liegen kommt. Die Gerade *l' c* ist also diese Projektion; der Kreis (C A, *e c*) aber kommt nach geschehener Umdrehung auf den Bogen *e d* zu liegen, und eine Tangente an ihr, parallel zu *l' c*, giebt den Punkt *f'*. Man ziehe aus *f'* eine Senkrechte auf *c e*, bemerke ihren Durchschnittspunkt *f*; trage sodann *f f'* von C nach F, und (*f*, F) ist der Ort des Punktes *f'* in der ursprünglichen Lage seiner Ebene.

Die Ebene L C enthält einen größten Kreisbogen und einen durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Lichtstrahl. Nach der Umdrehung dieser Ebene bis in die Stellung C D fällt jener Kreisbogen auf *e b d* und der Lichtstrahl in die Lage *l'' c*. Nachdem durch *e* eine Parallele mit *l'' c* gezogen, und durch ihren Begegnungspunkt *m* mit dem Bogen *e b d* eine Horizontale *m n* geführt, bis diese die Parallele *e n* zu *l c* in *n* durchschneidet, so wird aus *n* eine Vertikale errichtet, welche die L C im N trifft, und womit die Projektionen des Schattens, welche der Punkt (*e*, *c*) wirft, bestimmt sind.

Der Schatten (3, 3') irgend eines Zwischenpunktes, dessen Grundriß P ist, liegt in einer dem Lichte parallelen Vertikalebene P *r*; es schneidet diese die Kugel nach einem Kreise vom Radius *p r*, wenn nämlich *p* C auf L C senkrecht steht.

Man konstruire nun den Winkel L' C L, den der Lichtstrahl (L C, *l c*) mit seiner horizontalen Projektion bildet; projicire dann den Kreis P *r* sammt dem Punkte P auf die

Ebene **L C**, wo ersterer die Stellung **R 2 1** einnimmt, der letzte aber, der Punkt **P**, nach 1 fällt. Durch 1 wird zu **L′ C** eine Parallele geführt; in 2, wo sie den Kreis **R 2 1** schneidet, auf **L C** die Senkrechte **2 3** errichtet, bis zu deren Zusammentreffen in 3 mit der Geraden *P r*. Hierauf wird aus 3 eine vertikale Linie aufwärts gezogen und auf ihr die Größe 2. 4 des Grundrisses von 4′ aus nach 3′ getragen. Die auf solche Weise gefundenen Grenzlinien des Schlagschattens (*f* 3′ *n*, **F 3 N**) und (*b* 3′ *n*, **B 3 N**) sind Ellipsen; die Projektionen zweier Bögen größter Kreise der gegebenen Kugel.

Sechstes Beispiel. Schatten einer Brücke.

Erklärung der Tafel.

57. Die Tafel **VI.** enthält die vollständige Zeichnung einer kleineren Brücke, nämlich in Fig. 1 den Grundriß derselben, in Fig. 2 ihren Durchschnitt und in Fig. 3 ihren Aufriß. Die Gerade **X′ X** ist Projektionsaxe für die Ebene des Durchschnittes, und die Gerade **X Y** dasselbe für die Ebene des Aufrisses.

In den Figuren 1 und 2 ist die Gerade (*α*, *α′ α″*) die Längenaxe einer aufgedämmten Straße; eine auf diese Axe senkrechte Ebene **X′ X** schneidet die Horizontalebene des Bodens nach der Geraden *x′ x* (Fig. 2) und den Straßenkörper nach der symmetrischen Figur ***a b*** **1 2 5** *α* **6 4 3** ***c d***. Von dieser sind die zwei schiefen Linien ***a b***, ***c d*** die Schnitte in den Böschungen der Straße; die zwei Horizontalen ***b*** **1**, **3** ***c*** die Schnitte der Fußwege; die kleinen Vertikalen und die Schiefen **1 2 5**, **6 4 3** die Schnitte der Straßengossen; der Bogen **5** *α* **6** der Durchschnitt der cylindrischen Fahrbahn.

Diese verschiedenen Flächen bilden durch ihr gegenseitiges Zusammenstoßen horizontale Kanten, deren Grundrisse auf **X′ X** senkrecht stehen. Die Geraden **A′ A**, **D′ D** sind der Fuß der Böschung, d. h. ihre Durchschnitte mit der horizontalen Bodenfläche. Die Geraden **B B′**, **C C′** und ihre Verlängerung, der Kamm der Straße oder die Durchschnitte der Böschungen mit der Ebene der Fußwege.

Die Straße wird in senkrechter Richtung von einem Bache durchschnitten, dessen horizontale Uferränder im Grundrisse durch die Parallelen *v′ v* und *w′ w* angegeben sind.

Die Ebene der Fig. 3 ist parallel mit der Straßenaxe angenommen, also senkrecht auf die Richtung des Baches; sie enthält als Schnitt in der Oberfläche des Bodens die Gerade *z z′*, und ihr Durchschnitt mit dem Rinnsale des Baches besteht erstens aus den zwei gleich geneigten schiefen Linien ***i k***, ***m l***, welche den beiden Uferflächen angehören, zweitens aus dem Kreisbogen ***k n l***, dem Schnitte des Flußbettes. Diese drei Flächen durchschneiden sich nach zwei Horizontallinien, die im Grundrisse durch ***k k′***, ***l l′*** und in der Figur 2 durch die einzige

Gerade 7 8 vorgestellt sind. In letzterer Figur ist die Horizontale 9 10 die unterste Gerade des cylindrischen Flußbettes.

Der Bach ist durch eine Brücke überbaut, deren halbkreisförmige Tonnenwölbung zwischen den zwei Vertikalebenen ($b\ b'$, B B') ($c\ c'$, C C') eingeschlossen wird.

Die Weite des Brückenbogens wird durch den Abstand der zwei punktirten Parallelen B C, B' C bestimmt, welche zwei vertikale Ebenen vorstellen, die sich bis zu der Horizontalebene $\beta\ \beta$ Fig. 2, $\beta'\ \beta'$ Fig. 3 erheben, wo die Bogenfläche der Wölbung ihren Anfang nimmt.

Die Fig. 2 enthält den Querschnitt der Brücke durch die Ebene F G, welche parallel zu ihr selbst nach X' X versetzt angenommen wird. Die Gerade $f\ g$ dieser Ebene ist die höchste Erzeugungslinie des Tonnengewölbes; die Vertikalen $f\ b\ f$, h 12, $g\ c\ g'$, h, 11 und die sie verbindenden Kreisbögen $f'\ h$, $h'\ g'$ gehören den Häuptern der Brücke an und ihrer Brüstung; zwischen den Punkten 12 und 11 ist das Profil der Brücke dem der Straße gleich; die bei b und c vorspringenden Figuren zeigen das Profil des Gurtgesimses; das im Grundrisse durch die vor B B' und C C' vorspringenden Parallelen begrenzt wird.

58. Die Verbindung der Brückenhäupter mit den Böschungen der Straße geschieht beiderseits durch zwei Flügelmauern, deren oberer Theil in gleicher Ebene mit jenen Böschungen liegt, und die sich alle in einen Würfel endigen, dessen Gestalt die Figuren 2 und 1 bestimmen. Gegen den Bach zu ist jede Flügelmauer sammt ihrem Würfel von einer schiefen Ebene begrenzt, der man zur Bedingung giebt, durch die Punkte (B', b', l) und (μ, μ', m), oder ihre gleichnamigen an den andern Ecken der Brücke zu gehen, und eine gegebene Neigung gegen den Horizont zu haben. Z. B. eine Anlage von $^1/_6$ *). Man erfüllt diese Auflage, wenn man den Punkt (μ, μ', m) als Scheitel eines geraden Kegels nimmt, dessen Basis in der Horizontalebene des Punktes (B', l) ein Kreis ist von einem Radius $\mu\ \gamma = {}^1/_6\ m'\ n$, und wenn man dann aus dem Punkte (B', b', l) an diesen Kegel eine tangirende Ebene legt. Die punktirte Tangente B' γ an jenem Kreis ist der Horizontalriß der gesuchten Ebene auf der Ebene $k\ l\ m'$; eine durch den Scheitel des Kegels in der tangirenden Ebene gezogene Horizontale hat als Grundriß die mit Strichen und Punkten gezeichnete Parallele $\mu\ \varkappa$ zu γ B'; sie schneidet die Vertikalebene B B' in einem Punkte, dessen Projektion $\varkappa$ ist. Aus diesem werde mit dem Radius $\varkappa\ \lambda = {}^1/_6$ 13 b ein Kreisbogen, und an denselben eine mit γ B' oder $\mu\ \varkappa$ parallele Tangente gezogen. Es ist diese Tagente offenbar die Durchschnittslinie

*) In der Baukunst pflegt man die Neigung einer Ebene gegen die Horizontalebene durch das Verhältniß auszudrücken, was zwischen der horizontalen Projektion einer größten Neigungslinie der Ebene und der Höhe ihres Anfangspunktes besteht, erstere Größe heißt die Anlage der schiefen Ebene. So drückt z. B. die Gerade A' 14 die Anlage der Straßenböschung für die Höhe b 13 aus.

der fortgesetzten tangirenden Ebene $\varkappa\ \gamma\ \mathbf{B}'$ mit der Horizontalebene $b\ c$ (Fig. 2); daher ihr Begegnungspunkt δ mit der Geraden $\mathbf{B\ B}'$ sowohl der Vertikalebene $\mathbf{B\ B}'$, als der Böschungsebene der Flügelmauer, und der Ebene $a\ b$ angehört. Der Punkt ε auf der Geraden $\mu\ \varkappa$, und der Vertikalen aus a ist auch ein Punkt in beiden letztgenannten Ebenen, daher die Gerade $\varepsilon\ \delta$ die Projektion ihres gemeinsamen Durchschnittes bildet.

Die schiefe Ebene $\mathbf{B}'\ \gamma\ \mu\ \delta$ schneidet die Uferfläche $w\ w'\ l\ l'$ nach der geraden Linie ($\mu\ \mathbf{B}'$, $i\ b'$) (Fig. 1 und 2); sie schneidet ferner die schiefe Ebene $\nu'\ \pi'$ (Fig. 2) nach der Geraden ($\mu\ \pi$, $\nu'\ \pi'$). Die zur Verzeichnung dieser Linie nöthige Konstruktion ist auf der rechten Seite der Tafel bei dem Punkte (x, x') zu sehen, allwo die mit Strichen und Punkten gezeichnete Linie der $\mu\ \varkappa$ entspricht.

Die zwei andern Seitenflächen des Würfels sind vertikale Ebenen. Die übrigen Einzelnheiten der Tafel, so wie die ganze Verzeichnung des Aufrisses (Fig. 3) werden eine nähere Erklärung nicht nöthig haben.

Schatten des Grundrisses (Fig. 1).

59. Im Grundrisse und Aufrisse unserer Tafel haben wir die vorgestellte Brücke nach der Richtung ($\mathbf{L}$, l) beleuchtet angenommen, im Durchschnitte (Fig. 2) aber nach der Richtung ($\mathbf{L}'$, l'), wie es bei Zeichnungen dieser Art gebräuchlich ist. Es ist jedoch die Projektion des Lichtstrahles ($\mathbf{L}$, l) Fig. 1 und 3) auf der Ebene der Figur 2 dieselbe Gerade l, welche die vertikale Projektion von $\mathbf{L}'$ anzeigt ($\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}'$ sind nämlich symmetrisch gestellt in Bezug auf die Gerade $\mathbf{F\ G}$, die der der Ebene $\mathbf{X'\ X}$ des Durchschnittes parallel ist), weßhalb wir uns zur Verzeichnung der Schatten des Grundrisses gleichzeitig der beiden Projektionen Fig. 2 und 3 bedienen werden, je nachdem eine oder die andere größere Bequemlichkeit gewährt.

Die zu verzeichnenden Schatten der Fig. 1 liegen auf den verschiedenen Flächen der Brücke und auf der Horizontalebene $\mathbf{W\ W}'$ (Fig. 2 und 3). Wir beginnen die Erklärung unserer Konstruktionen auf der linken Seite der Tafel.

Der Schatten der Geraden ($v\ v'$, i) (Fig. 1 und 3) auf der Ebene $\mathbf{W\ W}'$ ist die ihr parallele Gerade ($\mathbf{J\ J}'$, j) die Durchschnittslinie jener Ebene $\mathbf{W\ W}'$ und der projicirenden Ebene des Lichtstrahles $i\ j$.

An der obern linken Flügelmauer ist das Polygon ($o\ p\ q\ r$, $i\ p'\ q'\ r'$) Trennungslinie von Schatten und Licht; die Lichtstrahlen, welche durch die Ecken dieses Polygons gehen, treffen die Horizontalebene $\mathbf{W\ W}'$ in Punkten, die dessen Schlagschatten bestimmen.

Der Würfel an der unteren linken Seite der Brücke hat als schattenwerfende Trennungslinie die Vertikale ($\mathbf{P}$, $i\ \nu'$) Fig. 1 und 2 und die schiefe ($\mathbf{P\ Q}$, $\nu'\ \pi'$). Aber der Schatten des Endes ($\mathbf{P}$, ν') der Vertikallinie fällt auf die Böschungsfläche der Straße nach (σ, Σ), daher ist die Figur $\mathbf{P}\ \Sigma\ \mathbf{Q}$ die horizontale Projektion des Schlagschattens an dieser Seite.

An der nun folgenden Brüstung sind die Linien, deren Schlagschatten bestimmt werden muß: die Vertikale (**H'**, $b\,f'$); der vertikale Bogen (**H' H**, $f'\,h$); die Horizontale (**H I**, h) und die Vertikale (**I**, h 12). Diese Schatten projiciren sich einmal auf die Horizontalebene b 1 (Fig. 2) und werden konstruirt wie die Zeichnung angiebt. Dann aber fallen sie zum Theil noch auf die Abweissteine, deren Seitenflächen schiefe Kegel sind mit einer (der inneren Fläche der Brüstung zunächststehenden) vertikalen Erzeugungslinie. Die letzgenannten Schatten sind daher die Durchschnitte schiefer Ebenen mit Kegelflächen und werden verzeichnet wie in der D. G. (Art. 232) gezeigt ist.

60. Was die Trennungslinie von Schatten und Licht dieser Kegelflächen betrifft, und deren Schlagschatten auf der Ebene b 1, so könnten wir auf das vierte Beispiel d. A. verweisen. Es wäre aber nicht bequem, den Scheitel dieser sehr spitzen Kegel zu konstruiren; man verzeichne deßhalb den Schlagschatten der oberen kleinen Basis eines Kegels, und man wird einen Kreis wie $\upsilon\,\tau$, von gleichem Durchmesser mit jenem finden (Art. 47), an diesen und an die untere Basis des Kegels ziehe man die zwei gemeinsamen Tangenten wie $\varrho\,\tau$, so ist dadurch der Schlagschatten verzeichnet. Werden nun die Berührungspunkte ϱ und τ bestimmt, und der mit letzterem ähnlich liegende Punkt ω der kleinen Basis, so muß die Gerade $\varrho\,\omega$ eine der gesuchten Trennungslinien seyn, und verlängert durch den Scheitel des Kegels gehen.

Das ähnliche Verfahren giebt die zweite schattenwerfende Erzeugungslinie, und es wird sofort bei allen übrigen Abweissteinen wiederholt. Die Richtigkeit des Ganzen aber leuchtet wohl ein, wenn man erwägt, daß der Schlagschatten irgend einer Fläche nothwendig die Schatten aller auf der Fläche gezeichneten Linien einschließen müsse.

Man bemerkt auf der linken Seite noch den Schlagschatten der vertikalen Fläche 1. 2 auf dem Boden der Gosse.

Auf der rechten Seite ist wiederum der Schatten der Abweissteine zu konstruiren, wovon ein Theil, nämlich der Schatten ihres oberen kreisförmigen Randes noch auf die cylindrische Fläche der rechten Brüstung und auf die Böschungsfläche der Straße fällt.

61. Die schattenwerfenden Linien an der oberen Flügelmauer rechter Hand geben sich leicht zu erkennen; ihr Schatten projicirt sich theils auf die horizontale Bodenoberfläche, theils auf die Ebene **W W'**, und wird konstruirt wie der Schatten an der linken Seite. Zur Bestimmung des Schattens den der vierte Würfel (in der untern rechten Ecke des Grundrisses) wirft, sind alle nöthigen Konstruktionslinien ausgezogen. Wir wollen nur anführen, daß der Schatten der in **P' Q'** projicirten Kante nach dem Punkte (x''', x) zu läuft, wo die Verlängerung dieser Linie die Horizontalebene $x\,x'$ durchschneidet.

Ueber alle diese verschiedenen Figuren hinweg fällt der Schatten der Brüstung (K T, $c\,h'$). Die vertikale Kante (K, $c\,g'$) derselben projicirt ihren Schatten in die zu L parallele Richtung K K'; sein Ende ist in (K', γ'). Der Schatten der horizontalen Kante (K M, g') hat als Projektion das Polygon (K' R S S' T' Z Z, $\gamma'\,s\,t$) (Fig. 1 und 2) die Durchschnittslinie der projicirenden Ebene $g'\,\gamma'$ mit den Flächen, die jenen Schatten empfangen.

Der Schatten der Kante (T, 11 h') ist noch zum Theil auf der Zeichnung sichtbar, aber der des Bogens (T M, $h'\,g'$) nicht mehr.

Schatten des Aufrisses (Fig. 3).

62. Die Ebene, welche den Schatten der Kante ($q\,r$, $q'\,r'$) enthält, hat als Horizontalriß die Gerade $\Phi\,\Psi$, und sie schneidet die Vertikalebene B B' nach der Geraden ($\Omega\,r$, $\omega'\,r'$), dem Schatten jener Kante auf dieser Ebene. Diesem Schatten parallel ist derjenige, welchen dieselbe Kante ($q\,r$, $q'\,r'$) auf die vertikale Seite des Gurtgesimses wirft.

Für die Konstruktion aller übrigen Schatten der Fig. 3 verweisen wir lediglich auf das schon Gesagte, so wie auf die Angaben der Zeichnung.

Schatten des Durchschnittes (Fig. 2).

63. Die zu konstruirenden Linien der Figur 2 begreifen einmal die Schlagschatten der Horizontalen (F G, $f\,g$) und der zwei an sie stoßenden Viertelskreise ($\beta\,f$, B F), ($\beta'\,g$, C G) auf der Bogenfläche der Brückenwölbung und auf der schiefen Wand der einen Flügelmauer. Zur bequemen Ausführung dieser Konstruktionen ist es nöthig, vorerst die Projektion des Lichtes in der Ebene B B' oder ihrer Parallelen $\alpha''\,\alpha'$, $\alpha'\,\alpha$ zu haben. Der Strahl (L', l') hat mit letzterer Ebene den Punkt (Δ, α) gemein; ein zweiter Punkt (Θ, ϑ) von ihr projicirt sich in die Ebene nach (ζ, ζ'). Aus Δ als Mittelpunkt und mit dem Radius $\Delta\,\zeta$ beschreibe man einen Kreisbogen, welcher die F G in Λ durchschneidet, einen Punkt, den man auf die Horizontale $\vartheta\,\zeta'$ nach Λ projicire, worauf $\Delta\,\alpha$ die Projektion des Lichtstrahles (L', l') in der Ebene $\alpha'\,\alpha''$ seyn wird, nachdem diese durch eine Viertelsdrehung um die Vertikale (Δ, $\alpha\,\zeta'$) als Axe, in die Ebene F G umgelegt worden.

Die Horizontale ($f\,g$, F G) ist der Durchschnitt der Ebene F G, welche der Figur 2 als Projektionsebene dient und des Brückengewölbes; ihr Schatten auf der Gewölbfläche ist eine zweite ihr parallele Gerade dieser Fläche. Diese beiden Geraden liegen in einer dem Lichte parallelen Ebene, die gleich ihnen auf der Ebene B B' der Basis der cylindrischen Brückenfläche senkrecht steht. Aus dem Mittelpunkte β werde mit $\beta\,f$ als Radius der Viertelsbogen $f\,\varrho$ beschrieben, wodurch man den Bogen (F B, $f\,\beta$) erhält, wenn er durch Drehung um die vertikale Axe (F, $\beta\,b$) in die Ebene F G gebracht wird, wo sein Ende (B, β) nach (R., ϱ.)

fällt. Die Projektion des Lichtes in der Ebene B B′ ist parallel zu $A'\alpha$; es werde daher durch f eine Parallele f 1′ zu letzterer Geraden gezogen. Diese Parallele bestimmt auf dem Bogen f e. den Punkt 1′, welcher der Horizontalen 1′ 4′, der vertikalen Projektion des Schlagschattens von ($f g$, F G) auf der Gewölbfläche angehört. Eine Parallele zu l' durch den Punkt f giebt den Anfangspunkt φ. jener Projektion. Von dem Punkte des Bogens ($\beta' g$, C G) an, der sich nach 4′ projicirt, fällt der Schatten der horizontalen Kante ($f g$, F G) auf schiefe Fläche der Flügelmauer.

Wir suchen zuerst die Projektion γ. seines Endpunktes. Der Lichtstrahl durch (G, g) hat als Projektion die zu L′ und l' wechselseitig parallelen Geraden G 6′, $g\,\gamma$.; die horizontalprojicirende Ebene G 6′ schneidet die Wand der Flügelmauer in der Geraden (5′ 6′, 7′ 8′), deren vertikale Projektion durch ihr Zusammentreffen mit der $g\,\gamma$. den Punkt γ. bestimmt.

Wird durch 4′ eine Parallele zu l' rückwärts gezogen, welche die $f g$ in 5′ durchkreuzt, aus 5′ auf F G die Senkrechte 5′ 6′ gefällt, so ist (5′, 6′) jener Punkt der Horizontalen ($f g$, F G) dessen Schatten sich nach 4′ projicirt, oder wenn man will an 4′ vorbei auf die Wand der Flügelmauer. Man konstruirt die Projektion η. dieses letzteren Schattens wie den Punkt γ. und bestimmt somit die Projektion desjenigen Theiles vom Schlagschatten der Geraden F G, $f g$, den die Flügelmauer auffängt.

64. Der schiefe Cylinder, welcher den Viertelskreis (B F, βf) zur Basis, und den Lichtstrahlen parallele Kanten hat, schneidet die cylindrische Gewölbfläche nach einer ebenen Kurve (Art. 44), deren vertikale Projektion der elliptische Bogen t. 3′ φ. ist. Die Bestimmung dieser Linie geschieht, nach den bereits gemachten vorläufigen Konstruktionen, ganz auf die Weise, welche wir beim dritten Beispiele d. A. angewendet. In der Ebene der Basis des Cylinders ist $A'\alpha$ die Projektion eines Lichtstrahles. Man zieht an diese Basis f e. e. (Fig. 2) eine zu $A'\alpha$ parallele Tangente, welche sie in τ. berührt, dadurch wird der schattenwerfende Bogen τ. f bestimmt, dem als vertikale Projektion auf der βf das Stück t. f entspricht. In t. nimmt also die Kurve t. 3′ φ. ihren Ursprung. Einen Zwischenpunkt 3′ findet man, wenn e. 2′ parallel zu $A'\alpha$ gezogen wird, so wie die Horizontalen e. ε., 2′ 3′. Die erste Horizontale schneidet die Gerade βf in ε. Durch diesen Punkt zieht man eine Parallele zu l', deren Begegnungspunkt auf der zweiten Horizontalen den Punkt 3′ abschneidet.

Der Endpunkt φ. der Linie t. 3′ φ. wurde als gleichzeitiger Anfangspunkt des Schattens φ. 4′ schon vorhin bestimmt.

Die Lichtstrahlen, welche durch die Punkte des Viertelskreises (C G, $\beta' g$) gehen, durchschneiden die in Fig. 2 sichtbare Seite der Flügelmauer in Punkten, deren vertikale Projektionen η. δ. γ. einen elliptischen Bogen zeichnen. Ein Punkt auf dem schattenwerfenden Kreise hat

als Projektionen die Punkte 9′, 10′ der Vertikallinie C G c' g; der Lichtstrahl dieses Punktes ist (10′ 12′, 9′ δ.); die horizontalprojicirende Ebene desselben schneidet die Ebene der Flügelmauer nach einer Geraden, deren Vertikalprojektion mit 7′ 8′ parallel ist, und auf welcher der Punkt δ. liegt.

Zur Bestimmung eines Punktes wie (9′, 10′) wird der Viertelskreis (C G, β' g) um die Vertikale (C, β g) als Axe gedreht und in die zu F G parallele Lage gebracht, allwo er durch den Bogen 9′ 11′ dargestellt ist, der mit einem Radius = β' g beschrieben, die Vertikale β, g in β' berührt. Nachdem 9′ beliebig angenommen, zieht man durch diesen Punkt eine Horizontale 9′ 11′ und trägt deren Länge zwischen 9′ und dem Kreise im Grundrisse von 6 nach 10′.

Der Schatten der Vertikalen (C, c' β') hat auf der Ebene der Flügelmauer, als vertikale Projektion, eine Parallele zu 7′ 8′, welche durch c' gehend den elliptischen Bogen η. δ. γ. berührt, wie jene vertikale selbst den Kreis berührt, dessen Schatten sich nach η. δ. γ. projicirt.

Der Schatten der übrigen Theile des Profiles g c g' wird konstruirt wie der Punkt γ.

65. Die Projektionen der durch f und g gehenden Lichtstrahlen berühren die Kurven t. 3′ φ. und η. δ. γ. in φ und resp. γ., weil diese Strahlen die äußersten Erzeugungslinien der Strahlencylinder vorstellen, deren Basen die, in β f, β' g projicirten Viertelskreise bilden.

Wollte man an einem Punkte des von (B F, β f) geworfenen Schattens eine Tangente verzeichnen, so wäre sie zu betrachten als die Durchschnittslinie der zwei Ebenen, welche durch den genommenen Punkt berührend an die cylindrische Gewölbfläche und an den Strahlencylinder gelegt werden.

Bei dem Anfangspunkte t. aber würde sich diese Tangente ergeben als Durchschnittslinie der tangirenden Ebene an die Gewölbfläche und der Ebene der Schattenkurve.

Die noch übrigen Schatten der Figur 2 erklären sich selbst wohl deutlich genug.

Konstruktion der Schatten auf Flächen mit inflektiver Krümmung *).

66. Die Flächen dieser Gattung haben das Eigene, daß auf ihnen Trennungslinien von Schatten und Licht und Schlagschatten ihrer eigenen Theile zu gleicher Zeit entstehen können, während bei Flächen mit konvexer Krümmung, wenn sie einen vollen Körper einschließen, nur

---

*) Die Krümmung einer Fläche in einem ihrer Punkte ist inflektiv wenn die zwei durch diesen Punkt gehenden Hauptkrümmungslinien ihre Konvexität nach entgegengesetzter Seite kehren. Eine Ebene, welche die Fläche in jenem Punkte berührt, muß sie daher auch durchschneiden und der Berührungspunkt ist ein doppelter Punkt des Schnittes (D. G. Art. 76).

Trennungslinien von Schatten und Licht entstehen, und nichts als Schlagschatten, wenn sie die Oberfläche hohler Körper bilden.

Die Beispiele, welche wir geben, betreffen die Schatten von Umdrehungs- und von windischen Flächen.

Erstes Beispiel. Schatten eines Ringes. Tafel VII.

67. Die Ebene **E F**, welche der vertikalen Projektionsebene parallel ist, enthält einen Kreis, dessen Mittelpunkt sich nach *c* projicirt, und der als Durchmesser die Gerade **E′ H′** hat. Durch die Rotation um die vertikale Axe (**O**, *o′ o″*) erzeugt derselbe eine ringförmige Fläche, deren größter Parallelkreis durch den von der Axe entferntesten Punkt (**E′**, **E**) des Erzeugungskreises beschrieben wird, so wie ihr kleinster Parallelkreis durch Punkt (**H′**, **H**).

Zur Konstruktion der Trennungslinie von Schatten und Licht auf dieser Fläche wenden wir die in Art. 195 der D. G. gegebene Methode an. Die besondern Punkte beider Projektionen der Trennungslinien sind:

1) im Aufrisse die Berührungspunkte *d*, *b*, *c*, *g* des Meridianes der Ebene **E F** mit den zu *l* parallelen Tangenten, deren zugehörige Horizontalprojektionen auf der Geraden **E F** in **D**, **B**, **C**, **G** liegen.

2) Im Grundriß die Berührungspunkte **I**, **K**, **M J** der begränzenden Parallelkreise mit den zu **L** parallelen Tangenten. Die Vertikalprojektionen derselben sind auf der Geraden **E′ F′** in *i*, *k*, *m j*.

3) Die höchsten und niedersten Punkte. Diese sind bei der vertikalen Stellung der Umdrehungsaxe in der, dem Lichte parallelen Meridianebene **N O R** enthalten. Sie zu finden, drehe man diese Meridianebene um die Axe (**O**, *o′ o″*) bis sie in die Stellung **E F** kommt, und man führe einen Lichtstrahl der Ebene, z. B. den durch des Ringes Mittelpunkt gehenden Strahl, mit herum. Dieser Strahl hat zu Projektionen die Geraden **O A**, und *o a*; und er durchschneidet die horizontale Projektionsebene in (*a*, **A**). Aus dem Mittelpunkte **O** werde mit **O A** als Radius ein Kreisbogen beschrieben, der die verlängerte Gerade **E F** in **A′** durchschneidet; den Punkt **A′** projicire man auf die Durchschnittslinie der Projektionsebenen nach *a′* und ziehe *o a′*, so ist dies der verlangte Lichtstrahl in seiner umgedrehten Stellung. Vier zu *o a′* parallele Tangenten berühren den Erzeugungsmeridian in den Punkten **1**, **2**, **3**, **4**, den Durchschnittspunkten des kreisförmigen Meridianes mit den aus *c* und *c′* auf *o a′* gefällten Senkrechten.

Es sind **1**, **2**, **3**, **4**, die gesuchten höchsten und niedersten Punkte der Trennungslinien von Schatten und Licht, in der auf **B E** umgelegten Stellung ihrer Ebene. Man bringt diese Ebene sammt ihren Punkten in die anfängliche Stellung zurück, wenn, nachdem die Horizon-

talen 1. 5. 3 und 2. 6. 4 gezogen sind, mit den Radien 5. 1 = 6. 2 und 5. 3 = 6. 2 aus dem Punkte O zwei konzentrische Kreise beschrieben werden. Diese schneiden die Gerade N O R in N, P, Q, R den Horizontalprojektionen der gesuchten Punkte, deren zugehörige Vertikalprojektionen auf den Horizontalen 1. 3, 2. 4 in *n*, *p*, *q*, *r* liegen.

68. Um Zwischenpunkte der Trennungslinie von Schatten und Licht zu erhalten, projicire man einen Lichtstrahl, etwa O A, *o a*, in eine beliebige Meridianebene, z. B. in die Ebene V O S. Der Punkt O gehört dieser Ebene schon an; der Punkt A projicirt sich nach (α, o''). Die Ebene V O S werde dann um die Horizontale (V S, *o*) gedreht, bis sie selbst horizontal ist. In dieser Lage werden sich die Meridiane der Ebene in ihrer wahren Gestalt, als die zwei über den Durchmessern 7. 8 und 9. 10 beschriebenen Kreise zeigen. Der in dieselbe Ebene projicirte Lichtstrahl kommt aber durch die Umdrehung in die Lage α' O, wenn $\alpha\,\alpha' = o\,o''$ senkrecht auf O α gezogen wird.

Die vier zu O α parallelen Tangenten berühren die umgelegten Kreise in v', u', t, s. Man fälle aus diesen auf S O V die Senkrechten u' U, v' V, t T, s S, und es gehören U, V, T, S der Horizontalprojektion der Trennungslinie von Schatten und Licht an. Die Senkrechten v' V, u' U, t T, s S, geben die Höhen und resp. Tiefen der in V, O, S, T projicirten Punkte über der Ebene E′ F′ an; daher man deren Vertikalprojektion findet, wenn auf der Senkrechten O *o* diese Höhen von *o* aus auf- und abwärts nach *u* und *v* getragen werden.

Man findet auf diese Weise im Grundrisse eine Reihe von Punkten D, N, V, J, G, R, I und eine Reihe B, P, M, C, Q, T und im Aufrisse die gleichnamigen Reihen *d*, *n*, *v*, *j*, *g*, *r*, *i* und *b*, *p*, *m*, *c*, *q*, *v*. Sie bestimmen die Projektionen zweier Zweige der Trennungslinie von Schatten und Licht; einen auf der äußeren und einen auf der innern Seite der Ringfläche.

An den vorhin konstruirten besondern Punkten dieser Linie kennt man auch die Tangenten, und diese sind ganz analog mit den bei dem Schatten der Kugel verzeichneten Tangenten an die Projektion ihrer Trennungslinie.

Im Aufrisse sind bei *r* und *n*, so wie bei *p* und *q* die Tangenten beider Zweige der Trennungslinie horizontal. Bei *d* und *g* berührt die Projektion des äußeren Zweiges, und bei *b* und *c* die Projektion des innern den Meridian E′ *d b*, *g* F′ *c*.

Im Grundrisse sind beide Zweige der Trennungslinie von Schatten und Licht symmetrisch, sowohl in Bezug auf die Meridianebene N O R, als in Bezug auf die rechtwinklig zu ihr stehende Meridianebene I O J. Es durchschneiden auch die zwei Geraden N R und I J die Projektionen des äußeren und inneren Zweiges rechtwinklig.

69. Man wird wahrnehmen, daß auf der äußeren Seite der Fläche der Schatten sich überall auf der gleichen Seite seiner Trennungslinie von Licht befinde, überall nämlich auf der rechten, oder, wenn man den Aufriß betrachtet, immer auf der untern Seite jener Linie. Bei dem innern Zweige aber ist nicht derselbe Fall. Bei dem Punkte (**P**, *p*) z. B. liegt der Schatten auf der konkaven Seite der Trennungslinie, und bei (**Q**, *q*) auf ihrer konvexen Seite. Man fragt nun, wie geht es zu, daß der Schatten hier von einer Seite der Trennungslinie auf die andere überspringt, und wo geschieht dies?

Bemerken wir zuerst, daß die vorgelegte Ringfläche auf ihrer äußeren Seite eine Konvexkrümmung hat, auf ihrer innern Seite, ihrer Kehle, aber eine inflektive Krümmung. Die Meridiankreise kehren hier ihre Erhabenheit gegen die Axe der Fläche, und die Parallelkreise ihre Höhlung.

Denken wir uns nun den konvexen Theil des Ringes hinweg und nur seine Kehle als physische Fläche vorhanden, aber wie bisher beleuchtet, so behaupte ich, die in ϑ **P** δ und ε **Q** ζ projicirten Bögen der Trennungslinien von Schatten liegen auf der gegen die Axe gekehrten Seite der Fläche; die zwischenliegenden Bögen aber, deren Projektionen ϑ **K** ε, δ **M** ζ sind, auf der andern Seite, und es entsteht auf der Seite der Fläche gegen die Axe ein Schlagschatten.

In der That, wenn man durch einen Punkt ($\varkappa\ \varkappa'$) der Trennungslinie einen Lichtstrahl ($\varkappa\ \lambda$, $\varkappa'\ \mu''$) führt, und den Schnitt konstruirt, den die vertikal projicirende Ebene $\chi''\ \varkappa'\ \mu''$ in der Ringfläche macht (D. G. Art. 240 sqq.), so erhält man als deren Horizontalprojektion die Kurve $\varkappa\ \chi'\ \mu'\ \mu\ \chi$, welche in $\varkappa$ von der Geraden $\varkappa\ \lambda$ berührt wird. Aber dieselbe Gerade schneidet in λ die Kurve wiederum, daher fällt der Schatten des Punktes ($\varkappa$, $\varkappa'$) noch auf die Ringfläche, und λ ist die horizontale Projektion dieses Schattenpunktes; seine vertikale Projektion liegt natürlicherweise auf der Geraden $\varkappa'\ \mu''$, senkrecht über λ.

Wenn man parallel zu **L** an die horizontale Projektion des inneren Zweiges der Trennungslinie zwei Tangenten zieht, so berühren diese die Linie einerseits in δ, ζ, andererseits in ϑ, ε. An die vertikale Projektion desselben Zweiges der Trennungslinie kann man parallel zu *l* vier Tangenten ziehen, welche sie resp. in δ', ζ', ϑ', ε' berühren. Aber die Punkte δ und δ' sind die Projektionen eines und desselben Punktes der Trennungslinie von Schatten und Licht, weil sie auf den Projektionen dieser Linie vertikal über einander liegen, und eben so verhält es sich mit ζ und ζ', ϑ und ϑ', ε und ε'. An diesen Punkten sind also die streifenden Lichtstrahlen wie (δ **X**, δ' *x*) nicht nur Tangenten an die Ringfläche, sondern auch noch Tangenten an die Trennungslinie von Schatten und Licht dieser Fläche. Diese Erscheinung kann nur bei inflektiv gekrümmten Flächen Statt finden und zwar da, wo die Trennungslinie der materiell gedachten Fläche von einer Seite derselben auf die andere überspringt.

In den Punkten (δ, δ') und (ϑ, ϑ') wird also der Schlagschatten auf der Kehle des Ringes seinen Anfang nehmen.

Schlagschatten des Ringes auf den zwei Projektionsebenen.

70. Der Schatten des Ringes auf der Horizontalebene wird durch die konvexe Linie 15. 11. 12. 14 eingeschlossen, welche symmetrisch ist in Bezug auf die Gerade **O A**. Die Linie wird verzeichnet, indem durch Punkte der äußeren Trennungslinie, wie (**J**, j) Lichtstrahlen gezogen, und deren Durchschnitte (12′, 12) mit der Horizontalebene bestimmt werden. Auf die gleiche Weise wird der Umfang desjenigen Theiles vom Schatten des Ringes konstruirt, welcher auf die vertikale Projektionsebene fällt. Beide Umfänge durchschneiden sich in den Punkten 15, 14 der Projektionsaxe. Man sieht auf der Zeichnung auch jene Punkte dieser Schattenkurven angegeben, bei denen die Tangenten vertikal sind, oder parallel zu den Projektionen des Lichtes.

Die innere Trennungslinie von Schatten und Licht des Ringes wirft ebenfalls einen Theil ihres Schattens auf die Horizontalebene, der wie der Schatten des äußeren Theiles konstruirt wird. Man findet durch dies Verfahren eine Linie von vier Zweigen, und mit vier Rückkehrpunkten **X**, **X′**, **Y**, **Y′** (D. G. Art. 411); es sind dies die Schatten der vier Punkte (δ, δ'), (ζ, ζ'), (ϑ, ϑ'), (ε, ε') an denen die Lichtstrahlen selbst Tangenten zur schattenwerfenden Linie sind.

Man wird sich ohne Mühe überzeugen, daß die Schatten dieser Punkte auf jedweder Fläche Rückkehrpunkte des Schattens der inneren Trennungslinie seyn müssen; wenn man erwägt, daß der Schatten irgend einer Linie auf irgend einer Fläche nichts ist, als die Projektion jener Linie auf dieser Fläche. Auf welche Weise aber die Projektion einer Linie, die **P** heißen soll, geschehen mag, so hat doch stets jedes Element der Linie als Projektion wiederum ein Element der aus der Projektion entstandenen Linie p. Nur wenn in einem Punkte **G** der projicirten Linie die projicirende Gerade dieses Punktes zugleich Tangente zur Linie **P** ist, so hat das Berührungselement in **G** als Projektion nicht wiederum ein Element der Linie p, sondern absolut nur einen einzigen Punkt, und dieser kann daher nichts anderes, als ein Rückkehrpunkt der Linie p seyn.

71. Will man in einem der Punkte **X,′ Y**, die Tangente **W X′**, **W′ Y** konstruiren, so findet man sie in dem Horizontalrisse der tangirenden Ebene an dem Punkte (ζ, ζ'), (ε, ε') des Ringes, denn diese Ebene ist auch tangirend an dem Strahlencylinder, der die innere Trennungslinie von Schatten und Licht zur Basis hat (Art. 11 und 12) ihr Horizontalriß ist daher Tangente an den Schnitt des Cylinders durch die horizontale Projektionsebene, d. h. an die Kurve **X X′ Y′ Y**.

Die Punkte ζ', ε' der Vertikalprojektion liegen gleich hoch; man ziehe daher durch ε' eine Horizontallinie, welche den Kreis $E'\,d\,H'$ in φ durchschneidet; in diesem Punkte ziehe man an denselben Kreis eine Tangente $\varphi\,w$; trage die Entfernung $o''\,w$ auf der Linie $O\,\varepsilon$ oder $O\,\zeta$ von O nach W' oder W und der Horizontalriß $W'\,Y$ oder $W\,X'$ ist bestimmt. Siehe D. G. Art. 88, 89.

Nicht bei jeder Neigung der Lichtstrahlen ist jedoch der Schlagschatten des inneren Zweiges der Trennungslinie eine Kurve mit Rückkehrpunkten. Denn wenn z. B. bei der gegebenen Figur des Ringes die Lichtstrahlen vertikal angenommen würden, so bestünde die Schattengrenze auf der Fläche aus zweien ihrer Parallelkreise, dem größten und kleinsten, deren Schlagschatten auf der Horizontalebene wiederum Kreise wären.

72. Die voranstehende Bestimmungsart der Trennungslinie von Schatten und Licht einer Ringfläche (Art. 67, 68) ist auf alle Umdrehungsflächen anwendbar, und mit leichter Modifikation auf alle röhrenförmigen Flächen, welche durch eine unveränderliche ebene Kurve erzeugt werden, deren Ebene sich so bewegt, daß sie stets normal zu einer gegebenen krummen Leitlinie bleibt. Man hat hier nur einen Lichtstrahl nach einander in verschiedene Stellungen der beweglichen Ebene zu projiciren, und dann, parallel dieser Projektion an die Erzeugungskurve der Ebene Tangenten zu ziehen, so werden deren Berührungspunkte in der Trennungslinie von Schatten und Licht der röhrenförmigen Fläche liegen.

Wir wollen übrigens noch ausdrücklich bemerken, daß die Gestalt der Erzeugungslinie während ihrer Bewegung unveränderlich bleiben muß, denn im andern Falle wäre das Verführen durchaus nicht zuläßig, weil es gänzlich auf der Voraussetzung beruht, daß der Schnitt der röhrenförmigen Fläche rechtwinklich auf ihrer Axe eine Linie sei, welche betrachtet werden könne als die Basis eines geraden Cylinders, der, um die Fläche umschrieben, sie nach jenem senkrechten Schnitte berühre. Eine tangirende Ebene an dem Cylinder ist dann auch tangirend an die Fläche in einem Punkte jener Kurve, welche Cylinder und röhrenförmige Fläche gemein haben.

73. Die Ringfläche, welche auf Tafel VII. vorgestellt, oder jede ähnliche, kann auch betrachtet werden als die Umhüllung des Raumes, den eine Kugel vom Radius $E'\,c$ durchläuft, deren Mittelpunkt sich in dem Kreise bewegt, den der Mittelpunkt c des Erzeugungskreises beschrieben hat. In jeder Stellung berühren sich die Kugel und die Ringfläche nach einem Meridiankreise der letztern. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich eine weitere Konstruktion des Schattens einer kreisförmigen Ringfläche. Es sei Fig. a der Grundriß einer solchen Fläche, λ die horizontale Projektion eines Lichtstrahles, die vertikale Projektion beider Gegenstände

als bekannt vorausgesetzt. Nachdem man eine Gerade wie **O E F** gezogen, als Projektion einer Meridianebene, beschreibe man über dem Durchmesser **E F** einen Kreis, welcher die horizontale Projektion der von dem Ringe umhüllten beweglichen Kugel in einer ihrer Stellungen vorstellt. Man konstruire die Projektion **I L M K** der Trennungslinie von Schatten und Licht der Kugel; diese Linie durchschneidet auf der Kugel den Berührungskreis **E F** dieser und der Ringfläche in zwei Punkten, deren Projektion **K** und **P** sind, und welche offenbar auch der Trennungslinie von Schatten und Licht der Ringfläche angehören, weil, wie schon bemerkt, die Kugel und diese Fläche sich nach dem in **E F** projicirten Kreise berühren, d. h. längs dieses Kreises ein Flächenelement gemein haben.

Es ist nicht nothwendig, die bewegliche Kugel in verschiedenen Stellungen zu zeichnen, und jedesmal ihre Trennungslinie von Schatten und Licht zu bestimmen, um zwei Punkte dieser Linie auf der Ringfläche zu erhalten; eine Zeichnung der Kugel z. B. im Mittelpunkte **O** des Ringes genügt. Ist die Projektion $\iota\ \pi\ \mu\ \varkappa$ ihrer Schattengrenze verzeichnet, ziehe man beliebige Radien und trage auf einen derselben **O** $\varkappa =$ **O** π von c nach **K** und **P**, auch von c' nach **K'**, **P'** und so bei den andern; und man hat jedesmal vier Punkte der Projektion der Trennungslinien von Schatten und Licht. Die Konstruktion der vertikalen Projektion dieser Linie kann keine Schwierigkeit darbieten, bei der Beachtung des Umstandes, daß ein Punkt, dessen Projektion **K** ist, einem vertikalen Kreise von bekanntem Durchmesser angehöre, und man durch Umlegung seine Entfernung über oder unter dem horizontalen Durchmesser dieses Kreises finde.

Mit ähnlicher Modifikation, wie vorhin (Art. 72) angegeben, läßt sich diese Konstruktionsweise auf alle jene röhrenförmigen Flächen anwenden, deren senkrechte Schnitte Kreise sind, welche besondere Form auch die krummlinige Axe dieser Flächen haben mag.

Zweites Beispiel. Schatten eines Bilderfußes. Tafel VIII.

74. Die Tafel VIII. stellt in beiden Projektionen eine Figur dar, die gewöhnlich zu Fußgestellen für Büsten u. dgl. gewählt wird. Sie ist durch Umdrehung gebildet und ihr Schnitt durch die vertikale Meridianebene **O P** besteht erstens aus drei vertikalen Linien $p\,p'$, $q\,q'$, $s\,s'$, wovon zwei durch die Horizontale $p'\,q$ verbunden sind; zweitens aus einer halben Ellipse $q'\,n\,s$, welche die Vertikalen $q\,q'$, $s\,s'$ rechtwinklich durchschneidet. Die Vertikallinien erzeugen durch ihre Umdrehung drei Cylinder, deren Basen die Kreise **P G O**, **Q F R** und **S D T** sind. Der elliptische Theil des Meridianschnittes aber erzeugt eine Fläche gleich der Kehle eines Ringes *). Die Trennungslinien von Schatten und Licht auf den cylindrischen Theilen pro-

*) Wenn man die halbe Ellipse $q'\,n\,s$ zu einer ganzen vervollständigt, so sieht man wohl ein, daß diese Linie bei ihrer Drehung um die Axe (**A**, **A'** a') eine Ringfläche mit elliptischem Meridianschnitte hervorbrächte.

jiciren sich horizontal als die Endpunkte des auf L senkrechten Durchmessers C D. Auf dem ringförmigen Theile aber hat diese Linie zu Projektionen die Kurven 1. 3. 2. 4 und 1′ 3′ 2′ 4′, welche konstruirt werden, indem man, wie im vorhergehenden Beispiele, das Licht in die Ebenen verschiedener Meridiane projicirt, und mit diesen Projektionen parallel, Tangenten an die Meridianschnitte jeder Ebene zieht. Alle Meridianebenen werden zur Ausführung dieser Konstruktionen, durch Drehung um die Axe (A, A′ α) in die Stellung O P gebracht, welche der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Die so erhaltene Trennungslinie ist symmetrisch in Bezug auf die Meridianebene E A, welche dem Lichte parallel ist, nicht aber, wie bei der kreisförmigen Ringfläche Tafel VII. auch in Bezug auf die Ebene D C.

75. Es findet bei der in Rede stehenden Trennungslinie von Schatten und Licht dieselbe Erscheinung Statt, welche wir in Art. 69 besprochen haben. An vier Punkten (5,5), (6,6′), (7, 7′), (8, 8′) sind die Tangenten der Linie parallel zu (L, l), oder diese Tangenten sind selbst Lichtstrahlen. Es folgt daraus, daß nur jene Bögen der Kurve (1. 3. 2. 4, 1′3′2′4′) deren Projektionen zwischen 5 und 7, so wie zwischen 6 und 8 fallen, wirkliche Trennungslinien von Schatten und Licht seyn können. Denn die andern Bögen könnten nur auf der innern Seite der Ringfläche vorhanden seyn, da sie auf der äußern durch Schlagschatten der Fläche selbst verdeckt sind. Solcher Schlagschatten sind zweierlei da, erstlich der von dem kreisförmigen Rande (D E S C, $t\,s$) herrührende; zweitens der, welchen die Zweige (5. 3. 7, 5′ 3′ 7′), (6. 4. 8, 6′ 4′ 8′) der Trennungslinie verursachen.

Man konstruirt den erstgenannten Schlagschatten, welcher als Projektionen die Linien $\alpha\,\delta\,\beta\,\varepsilon$ und $\alpha'\,\delta'\,\beta'\,\varepsilon'$ hat, nach der allgemeinen Methode des Artikels 32 sqq. Eine vertikale Ebene $\chi\,\pi$ parallel zu L schneidet die Umdrehungsfläche nach einer Kurve, die sich vertikal als die Linie $\varkappa'\,\varphi'\,\pi'\,\chi'$ projicirt. Der Punkt ($\varkappa$, $\varkappa'$) dieser Linie liegt auf dem schattenwerfenden Kreise (E D C, $t\,s$); eine Parallele zu (L, l) durch denselben Punkt trifft mit dem Schnitte der Ebene $\chi\,\pi$ in einem Punkte (γ', γ) zusammen, der dem gesuchten Schlagschatten angehört*).

Man bestimmt den höchsten Punkt (α, α'), auch den tiefsten (β, β'), auf die einfachste Weise, durch Drehung der jene Punkte enthaltenden Meridianebene E A, in die Stellung O P, wobei der Lichtstrahl (A E, l) dieser Ebene nach λ zu liegen kommt. Eine Parallele zu λ durch s schneidet die Ellipse $s\,n\,q'$ in 10; man ziehe die Horizontale 10. 9; trage deren

---

Für die nachfolgenden Konstruktionen ist es übrigens erforderlich, daß die fehlende Hälfte der Ellipse zu beiden Seiten der Axe in blinder Linie gezeichnet werde.

*) Eine zu l parallele Tangente berührt die Linie $\varkappa'\,\pi'\,\chi'$ in φ', ein Punkt, dessen zugehörige Horizontalprojektion in φ liegt, und welcher der Trennungslinie von Schatten und Licht angehört (s. Art. 32).

Länge von A nach α und errichte hier eine Vertikale, welche die 10. 9 in α' durchschneidet. Dieselbe Konstruktion giebt auch den Punkt (β, β').

Die Kurve ($\alpha\ \delta\ \beta\ \varepsilon$, $\alpha'\ \delta'\ \beta'\ \varepsilon'$) hätte auch konstruirt werden können, indem sie betrachtet worden wäre als Durchschnitt der ringförmigen Umdrehungsfläche und des schiefen Cylinders, der als Basis den Kreis (E D C, $t\ s$) hat; man würde dabei horizontale Hilfsebenen anwenden.

Eine solche Ebene n 11 schneidet die Umdrehungsfläche nach einem Kreise, dessen Durchmesser gleich $m\ n$ ist, und der sich horizontal nach $\delta\ n\ \varepsilon$ projicirt; dieselbe Horizontalebene schneidet den schiefen Cylinder nach einem, seiner Basis gleichen Kreise, dessen Mittelpunkt (11, 12) im Durchschnitte der Axe (A 12, 13. 11) des Cylinders und der Ebene n 11 liegt. Die horizontale Projektion 14 $\delta\ \varepsilon$ des letzteren Kreises und die Projektion $\delta\ n\ \varepsilon$ durchschneiden sich in δ und ε; zwei Vertikallinien aus diesen Punkten schneiden auf der n 11 die Punkte $\delta'\ \varepsilon'$ ab, welche mit dem ersten zusammen genommen zwei Puukte der verlangten Kurve vorstellen.

76. Man wird wahrnehmen daß da, wo der gefundene Schlagschatten und die Trennungslinien von Schatten und Licht sich durchschneiden, die Tangente an erstere Linie dem Lichte parallel sei; ζ ist die vertikale Projektion eines dieser Punkte; und es ist auch eine Parallele zu l durch diesen Punkt Tangente an die Linie $\alpha'\ \delta'\ \beta'\ \varepsilon'$; denn der Lichtstrahl, dessen Projektion durch ζ geht, liegt in der tangirenden Ebene zur Umdrehungsfläche eben so wie in der tangirenden Ebene an den Cylinder, er liegt also im Durchschnitte dieser zwei Ebenen und ist Tangente an die Durchschnittslinie der zwei Flächen, welche gegenseitig von jenen Ebenen berührt werden.

Es ist nicht schwer, sich zu überzeugen, daß die besondere Form der vorgelegten Umdrehungsfläche keinen Einfluß auf obiges Ergebniß hat, sondern daß es immer Statt finden werde, welche Erzeugung auch die Fläche haben möchte, worauf der Schatten einer Linie fällt.

77. Der Schatten, welcher von der Linie (1. 3. 2. 4, 1′ 3′ 2′ 4′) auf die Umdrehungsfläche selbst geworfen wird, beginnt an den Berührungspunkten (5, 5′) (6, 6′); man konstruirt die Punkte desselben durch Anwendung schneidender Hilfsebenen. Die Parallele U Z zu L stellt eine derselben vor; ihr Schnitt in der Umdrehungsfläche hat als vertikale Projektion die Linie $u\,x\,y\,z$, und dieser Schnitt hat mit der Trennungslinie den Punkt (X, x) gemein. Eine durch letzteren Punkt gezogene Parallele zu (L, l) hat als vertikale Projektion die Gerade $x\ y$, welche parallel zu l die Krumme $u\ x\ y\ z$ in x berührt und in y nochmals durchschneidet. Wird durch y eine Senkrechte herabgezogen, welche die U X in Y schneidet, so hat man in (Y, y) einen der gesuchten Punkte.

In Betreff des Schlagschattens, den der gegebene Körper auf die horizontale und vertikale Projektionsebene wirft, bemerken wir, daß die Schlagschatten der cylindrischen Theile, d. h. die Schlagschatten der Trennungslinien von Schatten und Licht dieser Theile, auf der Horizontalebene parallel zu **L** sind, und auf der Vertikalebene vertikal, wie **15. 16**, der Schatten von (**C**, *c c'*).

Die Schatten der horizontalen kreisförmigen Ränder sind, auf der Horizontalebene, ihnen gleiche Kreise, und auf der Vertikalebene, Ellipsen.

Der Schlagschatten des ringförmigen Theiles ist auf der Horizontalebene eingeschlossen von einer Kurve aus vier Zweigen und mit vier Rückkehrpunkten, ganz wie in dem Beispiele der Tafel **VII**, worauf wir deßhalb verweisen. Man kann bei diesen verschiedenen Schlagschatten noch bemerken, daß die Punkte wie σ' σ auf der Projektion eines und desselben Lichtstrahles liegen, eben so τ' und τ. Der Punkt (ω, ω') liegt auf einem Lichtstrahle, dessen vertikale Projektion durch ζ geht u. s. f.

Drittes Beispiel. Schatten einer dreieckigen Schraube. Tafel IX.

Erklärung der Zeichnung.

78. Die Tafel **IX** enthält die Zeichnung einer vertikal stehenden dreieckigen (scharfen) Schraube mit ihrem cylindrischem Kopfe. An der Schraube unterscheiden wir die Spindel und das Gewinde. Die Spindel ist ein gerader Cylinder, welcher den Kreis **B D C** zur Basis hat. Eine Ebene, durch die Axe (**A**, α α') des Cylinders gelegt, schneidet den ersten (untersten) Umgang des Gewindes nach dem gleichschenklichen Dreiecke *a b e*, dessen beide Schenkel gleiche Neigung gegen die Axe haben und verlängert, dieselbe in β und β' durchschneiden. Diese Schenkel bilden die Erzeugungsfigur des Schraubengewindes, indem sie sich in einer Spiralbewegung um die Axe dreht. Jeder Punkt der erzeugenden Figur beschreibt bei dieser Bewegung eine cylindrische Spirallinie (D. G. Art. 344.) deren Gang gleich der Basis *a e* des Dreiecks *a b e* ist. Jede so beschriebene Spirale liegt auf einem geraden Cylinder, dessen Axe dieselbe ist, wie die der Spindel, und dessen Basis ein Kreis ist, von einem Halbmesser gleich der unveränderlichen Entfernung des beschreibenden Punktes von der Axe. Die Spirale, welche von dem Punkte *a* oder *e* auf diese Weise beschrieben wird, liegt auf einem Cylinder, dessen kreisförmige Basis die Gerade **E A** zum Halbmesser hat; ihre Vertikalprojektion ist die Linie *a f g e f' g'* . . . . . Der Punkt *b* der Erzeugungsfigur beschreibt seine Spirale auf der Spindel der Schraube selbst; diese Linie trennt den oberen Theil des Gewindes vom untern; ihre Vertikalprojektion ist *e f b c' f'*. . . .

Die Oberfläche des Schraubengewindes besteht aus Stücken zweier ähnlich gebildeten; aber

der Lage nach verschiedener windischen Flächen. Wenn die unbestimmt verlängerte Gerade *a b* als Erzeugungslinie der einen Fläche genommen wird, so kann man ihre Bewegung durch drei Leitlinien festsetzen, nämlich die Spirale (E F G, *a f g e f′* ...), die Spirale (B D C, *b c′ f′* ....) und die Axe (A, *α α′*). Die zweite windische Fläche hätte dieselben Leitlinien, aber ihre Erzeugungslinien würden mit je einer solchen Linie der ersten Flächen eine symmetrische Lage haben, in Bezug auf die Axe (A, *α α′*).

79. Es seie aufgegeben, eine Reihe von Erzeugungslinien der ersten Fläche zu verzeichnen. Hiezu theile man den Umkreis E F G in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in 16, ziehe durch die Theilungspunkte Radien, und man hat die Horizontalprojektionen eben so vieler Erzeugungslinien. Nachdem von den Theilungspunkten des ersten Kreises senkrechte Linien auf die Projectionsaxe errichtet, welche die Linie *a f g e f′* . . . in *a*, 1, 2, 3 . . . . . durchschneiden, theile man die Ganghöhe *a e* des Gewindes ebenfalls in 16 Theile, trage dieselben auf *α α′* von *β* aufwärts, und verbinde die Theilungspunkte der Reihe nach mit 1, 2, 3 . . . . . Die so erhaltenen Geraden sind die Vertikalprojektionen derselben Erzeugungslinien, welche vorhin im Grundrisse gefunden worden *). Diese Projektionen werden von einer krummen Linie *δ ζ ε* eingeschlossen, die sich, bei der Konstruktion von mehr Erzeugungslinien, auf der andern Seite der Axe wiederholen würde, und so abwechselnd fort auf beiden Seiten.

Zwischen den Berührungspunkten auf der Linie *f b c′* . . . . und der Linie *a f g e* . . . ist daher die *δ ζ ε* Gränze der Vertikalprojektion des Schraubengewindes. Wir werden weiter unten (Art. 83) ein Verfahren kennen lernen, wornach jene Berührungspunkte direkt bestimmt werden können. Die untere Fläche des Gewindes wird in ihrer Vertikalprojektion ebenfalls von Stücken einer krummen Linie begränzt, welche die Grenzlinie *δ ζ ε* vorwärts des Punktes *b* auf der Horizontalen *b g* u. s. f. durchschneidet, und verlängert noch einmal vorwärts der Punkte *e* oder *a* auf den Horizontallinien dieser Punkte durchschneiden würde.

Trennungslinien von Schatten und Licht des Gewindes.

80. Abgesehen von der Methode schneidender Hülfsebenen giebt es noch mehrere besondere Konstruktionsarten, wornach die Trennungslinie von Schatten und Licht auf der windischen Spiralfläche des Schraubengewindes verzeichnet werden kann.

I. Eine Anwendung des Art. 205 der D. G. Durch eine beliebige Erzeugungslinie der

---

*) Welche leztern aber auf der Zeichnung hinweggelassen sind, um sie mit Linien nicht zu überfüllen. Hiebei wollen wir noch bemerken, daß die obigen Vertikalprojektionen der Erzeugungslinien auch hätten gefunden werden können, wenn man die Theilungspunkte des inneren Kreises B D C auf die Linie *b c′ f* . . . . nach 1′, 2′, 3′ . . . projicirt und diese Punkte dann mit 1, 2, 3 . . . verbunden hätte.

Spiralfläche führe man eine Ebene parallel zu (L, *l*). Diese Ebene wird die Fläche noch in einer krummen Linie durchschneiden, die gebildet ist aus den Durchschnittspunkten der Ebene und der übrigen einzelnen Erzeugungslinien. Da wo letztere Linie und die genommene Gerade sich durchschneiden, berührt die Ebene die windische Fläche, und der Berührungspunkt liegt in der Trennungslinie von Schatten und Licht.

II. Durch Anwendung berührender Paraboloide (D. G. Art. 151. sqq.). Man betrachte eine Erzeugungslinie (E A, $\alpha\,\beta$) der oberen Gewindfläche; es schneidet diese die erste spiralförmige Leitlinie in dem Punkte (E, *a*), die zweite gleichnamige Leitlinie in (B, *b*) und die dritte Leitlinie, die Axe (A, $\alpha\,\alpha'$), in (A, β'). Die letztere Linie ist für jeden ihrer Punkte zugleich ihre eigene Tangente, die beiden Spiralen aber haben an den Punkten, die auch jener Erzeugungslinie angehören, Tangenten, welche in zwei auf den Radius A E senkrechten Vertikalebenen E H, B J liegen. Werden diese drei Tangenten als Leitlinien einer windischen Fläche genommen, so ist diese ein Paraboloid, und dies berührt die windische Fläche des Schraubengewindes in der ganzen Ausdehnung der, beiden Flächen gemeinschaftlichen Erzeugungslinie (E A, $\alpha\,\beta$). Nun aber ist die Tangente zur ersten Spiralen an ihrem Punkte (E, *a*) die Hypothenuse eines rechtwinklichen Dreieckes, dessen eine, horizontale Seite E H einem aliquoten Theile des Umkreises E F G gleich ist, z. B. dem vierten Theile desselben; und dessen zweite, vertikale Seite eine Länge hat gleich dem eben so vielsten Theile der Ganghöhe (D. G. Art. 346).

Die Tangente zur zweiten Spiralen an dem Punkte (B, *b*) derselben ist gleichfalls Hypothenuse eines vertikal stehenden rechtwinklichen Dreieckes, dessen eine Seite die Horizontale B J = $^1/_4$ Umfang B D C ist, und die andere Seite eine Vertikale, gleich dem vierten Theile des Ganges.

Eine durch die Axe gelegte Vertikalebene A H schneidet die beiden Tangenten, jede in einem Punkte; diese bestimmen eine gerade Erzeugungslinie des berührenden Paraboloides, deren vertikale Projektion *h h'* zufolge der vorangegangenen Konstruktionen parallel zu $\alpha\,\beta$ seyn muß.

Es bleibt demnach die bewegliche Erzeugungslinie des Paraboloides bei der zweiten Erzeugungsart (D. G. Art. 122) desselben stets parallel zu der Vertikalebene A α, bei dessen erster Erzeugungsart aber parallel zu der schiefen, auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehenden Ebene (β *a*, *a* E). Man denke sich dieses Paraboloid unveränderlich mit der beweglichen Erzeugungslinie (E A, $\alpha\,\beta$) der Spiralfläche verbunden, so wird es in jeder Stellung jener Geraden tangirend zu letzterer Fläche seyn.

Bei irgend einer geraden Erzeugungslinie der Spiralfläche konstruire man sofort das berührende Paraboloid, dann führe man durch die Gerade eine Ebene parallel mit der Richtung der Lichtstrahlen; man bestimme die Durchschnittspunkte dieser Ebene und zweier weiteren

Erzeugungslinien des Paraboloides. Die beiden Punkte verbinde man durch eine gerade Linie, so gehört diese dem zweiten Erzeugungssystem des Paraboloides an, sie begegnet der erst genommenen Erzeugungslinie in einem Punkte, und dies ist der Berührungspunkt des Paraboloides und der dem Lichte parallelen Ebene, also auch der Berührungspunkt derselben Ebene mit der Spiralfläche, und folglich ein Punkt der Trennungslinie von Schatten und Licht dieser Fläche.

Die auf eine oder die andere Art gefundenen Punkte der Trennungslinie von Schatten und Licht bestimmen eine Kurve von doppelter Krümmung, welche entweder geschlossen seyn kann, oder offen, und zwar im letzte Falle mit einem oder zwei unendlichen Zweigen; je nach der Neigung der geraden Erzeugungslinien und der Lichtstrahlen gegen die Axe der Fläche.

Grenzpunkte der Trennungslinie von Schatten und Licht auf der Gewindfläche.

81. Wir betrachten auf unserer Zeichnung nur jene Stücke der gegebenen windischen Spiralflächen, welche das Gewinde der Schraube bilden, und diese Stücke sind zwischen den zwei vertikalen Cylindern gefaßt, deren kreisförmige Grundlinien die Geraden **E G** und **B C** zu Durchmessern haben. Die Theile der Trennungslinien von Schatten und Licht der zwei windischen Flächen, außerhalb dieser Grenzen, haben daher keinen Bezug auf unsere Aufgabe, und um alle überflüssigen Konstruktionen zu vermeiden, wollen wir die Punkte der Trennungslinien bestimmen, welche auf den Spiralen liegen, die von den Enden *b* und *a* oder *e'* der Erzeugungsfigur beschrieben werden.

Zuerst bemerke man, daß alle tangirenden Ebenen an die Oberfläche des Gewindes, deren Berührungspunkte auf einer und derselben Spirallinie liegen, den nämlichen Winkel mit der Axe der Fläche bilden, oder mit der auf die Axe senkrechten horizontalen Projektionsebene. Denn jede dieser Ebenen enthält erstens eine Tangente an die Spirale und zweitens die gerade Erzeugungslinie, welche durch den Berührungspunkt geht. Aber der Winkel den diese Geraden unter sich oder mit einer Parallelen zur Axe bilden ist unveränderlich, daher auch jede durch sie gelegte Ebene eine unveränderliche Neigung gegen Axe oder ihre Parallele hat, welchem Punkte der genommenen Spirale sie angehören.

Bestimmen wir die tangirende Ebene von dem Punkte (**F**, *f*) der oberen Gewindfläche. Hier hat die Tangente an die Spirale dieses Punktes als horizontale Projektion die Senkrechte **F K** auf den Radius **A F**. (D. G. Art. 346.)

Da die Spirale in **E** ihren Anfang nimmt, so trage man die Länge des Bogens **F E** von **F** nach **K**, und man hat daselbst den Punkt bestimmt, wo die in **F K** projicirte Tangente die horizontale Projektionsebene durchschneidet. Die verlängerte Erzeugungslinie (**D E**, *d f*) des Punktes (**F**, *f*) schneidet die Horizontalebene in **I**, einem Punkte, welcher gefunden wird,

wenn man durch f eine Parallele $f\,i$ mit $e'\,b$ zieht, und mit $\alpha\,i$ als Radius aus **F** einen Bogen beschreibt, welcher die **D F** in **I** durchschneidet. Man ziehe nun die Gerade **K I** und es ist diese der Horizontalriß der Ebene, welche die obere Gewindfläche in dem Punkt (**E**, f) der äußeren Spirale berührt.

Wenn man durch irgend einen Punkt (**P**, **P'**) des Raumes eine Ebene parallel zu dieser tangirenden Ebene legt, so hat sie als Horizontalriß eine zu **I K** parallele Gerade **R S**. Der Punkt **R** dieser Geraden ist der Begegnungspunkt der horizontalen Projektionsebene, mit einer durch (**P**, **P'**) gezogenen Parallelen zu der Erzeugungslinie (**D F**, $d\,f$); er wird am einfachsten bestimmt durch Umdrehung der letzten Parallelen in die zur vertikalen Projektionsebene parallele Stellung. Nachdem durch **P** eine Parallele **P R** zu **D F**, und durch **P'** eine Parallele **P** ϱ zu $f\,i$ oder $e'\,b$ gezogen worden, und eben so die Vertikale **P P'**, beschreibe man aus **P** als Mittelpunkt und mit $e'\,\varrho$ als Radius einen Kreisbogen, welcher auf der **P R** den Punkt **R** abschneidet.

Die Senkrechte **P S** auf **R S** giebt den Radius der Basis eines geraden Kegels, der als Scheitel den Punkt (**P**, **P'**) hat, und von der Ebene, deren Horizontalriß **R S** ist, berührt wird. Jede tangirende Ebene an diesen Kegel, hat gegen die Vertikale (**P**, e' **P'**) eine Neigung, welche gleich ist der Neigung der tangirenden Ebene am Punkt (**F**, f) der Gewindfläche gegen die Axe (**A**, $\alpha\,\alpha'$), oder gleich der Neigung dieser Axe mit jeder tangirenden Ebene an dieselbe Fläche, deren Berührungspunkt auf der Schraubenlinie (**E F G** . ., $a\,f\,g$ . . .) liegt.

Nimmt man den Kreis vom Radius **P R** als Basis eines zweiten Kegels, der mit dem ersten gleichen Scheitel hat, so wird jede Erzeugungslinie desselben mit der Vertikalen (**P**, ϱ' **P'**) einen Winkel bilden, gleich dem Winkel, den die Erzeugungslinien der windischen Fläche mit der Axe (**A**, $\alpha\,\alpha'$) machen. Irgend eine tangirende Ebene an den ersten Kegel wird den zweiten nach einer von seinen Erzeugungslinien durchschneiden, und diese ist parallel mit einer Erzeugungslinie der windischen Fläche des Gewindes. Die Berührungslinie der tangirenden Ebene mit dem ersten Kegel und ihre Durchschnittslinie mit dem zweiten machen stets den gleichen Winkel unter sich; die horizontale Projektion dieses Winkels ist ebenfalls unveränderlich und gleich **S P R**. Die beiden Kegel mögen mit K und K' bezeichnet werden.

82. Es soll nun eine tangirende Ebene parallel mit dem Lichtstrahle (**L**, l) an die windische Spiralfläche geführt werden, so daß deren Berührungspunkt auf der Schraubenlinie (**E F G** . ., $a\,f\,g$ . . .) liegt? Zu dem Ende führe ich eine tangirende Ebene parallel zu (**L**, l) an den Kegel K; diese Ebene hat als Horizontalriß die Tangente **Q U**, oder **Q W** an die Basis des Kegels, welche durch den Punkt **Q** geht, den Durchschnittspunkt der Horizontalebene mit dem durch (**P**, **P'**) gehenden Lichtstrahle.

Die tangirende Ebene, deren Horizontalriß **Q U** ist, berührt den Kegel *K* nach einer Geraden, die sich als der Radius **P U** projicirt; ich mache nun den Winkel **U P T** = **S P R**, und **P T** ist die horizontale Projection der Parallelen zu jener Erzeugungslinie der windischen Fläche, auf welcher der gesuchte Berührungspunkt liegt; ich ziehe also den Radius **A** τ parallel zu **P T**, so schneidet diese auf dem Kreise **E F G** den Punkt τ ab, welcher die horizontale Projektion eines Punktes (τ, τ') der Trennungslinie vom Schatten und Licht auf der oberen Gewindfläche ist. Die Wiederholung desselben Verfahrens bei der zweiten Tangente **Q V** hätte das rechtwinklige Dreieck **W P V** geliefert; und eine Parallele **A** φ mit dessen Hypothenuse **P V** den Punkt φ, dessen vertikale Projektion φ' ebenfalls auf der Linie *a f g* . . . läge. Die aus τ und φ errichteten Vertikallinien durchschneiden die verschiedenen Umgänge der Spiralen, welcher jene Punkte angehören in andern Punkten, deren Vertikalprojektionen τ', τ'', $\tau,'''$ . . . und $\varphi,'$ $\varphi,''$ $\varphi,'''$ . . . . sind, und bei deren jeglichen die tangirende Ebene an die Oberfläche des Schraubengewindes parallel mit dem Lichte ist.

Durch die Betrachtung zweier neuen Kegel *K* und *K'* bestimmt man die Punkte (σ, σ'), (ψ, ψ') der Trennungslinie vom Schatten und Licht der oberen Gewindfläche, welche der innern, vom Punkte (**B**, *b*) beschriebenen Schraubenlinie angehören; wobei wir bemerken wollen, daß der Kegel *K'* für alle auf der oberen Gewindfläche gezeichneten Spiralen der nämliche bleibe; der Kegel *K* aber für jede sich ändere.

83. Wenn man die tangirende Ebene an dem Punkte (**E**, *f*) der unteren Gewindfläche konstruirt, so findet man als ihren Horizontalriß eine Gerade, welche jenseits von **F K** liegend, mit ihr einen Winkel bildet, gleich **I K F**, also symetrisch mit **I K** in Bezug auf **F K**. Man kann hieraus schließen, daß um die Punkte der Trennungslinie von Schatten und Licht der unteren Gewindfläche zu bestimmen, welche auf den äußeren Spiralen liegen, der Kreis der Horizontalebene vom Radius **P R** als Basis des Kegels *K'* benützt werden könnte, daß aber sein Scheitel symetrisch mit (**P**, **P'**) liegen müsse, in Bezug auf die horizontale Projektionsebene, also unter dieser Ebene in einer Tiefe gleich ϱ' **P'**.

Nachdem die Grenzpunkte der Trennungslinie vom Schatten und Licht auf der oberen und unteren Gewindfläche bestimmt sind, konstruirt man Zwischenpunkte dieser Linien, indem man bei den Erzeugungslinien der Grundflächen, welche innerhalb des Winkels der Vertikalebenen **A** σ, **A** τ u. s. f. liegen, nach Angabe des Absatzes **I** oder **II** (Art. 80) arbeitet. Oder aber man nimmt auf beiden Gewindflächen neue Schraubenlinien an, deren Horizontalprojektionen Kreise sind, welche aus **A** mit Halbmessern beschrieben werden, kleiner als **A E** und größer als **A B**, und man arbeitet bei diesen neuen Spiralen, wie bei den begrenzenden.

84. Die voranstehenden Betrachtungen können auch angewandt werden, um die Punkte der Kurve $\delta\,\zeta\,\varepsilon$ direkt zu bestimmen. Diese begrenzende Kurve ist die Projektion der Berüh-

ruhngslinie der gegebenen windischen Fläche und eines um dieselbe umschriebenen Cylinders, dessen Erzeugungslinien auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen. Sie wird gebildet von den Berührungspunkten aller tangirenden Ebenen an die windische Fläche, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen. Wir wollen von diesen tangirenden Ebenen diejenige bestimmen, deren Berührungspunkt auf der Spirale (E F G . . . ., *a f g d* . .) liegt. Diese Ebene ist parallel mit derjenigen tangirenden Ebene an den Kegel *K*, welche auf der Vertikalebene senkrecht steht, und deren Horizontalriß jene Tangente an den Kreis vom Halbmesser P S ist, welche senkrecht ist auf die Projektionsaxe $e'\,q$. Nachdem man den Winkel $\mu\,\mathrm{P}\,\varpi = \mathrm{S\,P\,R}$ gemacht, zu $\mathrm{P}\,\omega$ die parallelen Radien $\mathrm{A}\,\pi\,\mathrm{A}\,\varkappa$ gezogen, und aus den letztgenannten Punkten auf die Projectionsaxe Senkrechte von unbestimmter Länge errichtet, so durchschneiden diese die verschiedenen Umgänge der Linie *a f g d e'* . . . . in Punken wie ε, ε', ϑ, ϑ', welche der Grenze der Vertikalprojektion des Schraubengewindes angehören.

Der Kopf der Schraube ist ein gerader kreisförmiger Cylinder, dessen Trennungslinie von Schatten und Licht einer Erklärung nicht bedarf.

Konstruktion der Schlagschatten der Schraube.

85. Bei dem oberen Theile der Schraube beginnend, haben wir zuerst den Schlagschatten des Kopfes auf dem ersten Umgange des Gewindes zu verzeichnen.

Durch einen Punkt (X, *x*) des schattenwerfenden Randes werde ein Lichtstrahl (X 2, *x m*) gezogen: die horizontalprojicirende Ebene X 2 dieses Strahles schneidet die obere Gewindfläche in einer Linie, deren vertikale Projektion 1′ *m* 2′ ist. Der Begegnungspunkt *m* letzterer Linie und der *x m* bestimmt den Schatten (*m*, M) des Punktes (*x*, X). Wenn man bei dem Punkte (3, 3′) dessen horizontale Projektion auf dem zu L parallelen Radius A 3 liegt, eben so arbeitet, so findet man als Schnitt der projicirenden Ebene 3 A und der Gewindfläche eine gerade Erzeugungslinie der letzteren, und mittelst dieser einen Punkt (L, L′) des gesuchten Schattens (M 4′ 5, *m* 4, 5′).

Auf die verschiedenen Umgänge der oberen Gewindfläche fallen die Schlagschatten, sowohl der Trennungslinien von Schatten und Licht der unteren Gewindfläche, als auch der äußeren Spiralen; man konstruirt diese durch Anwendung von schneidenden Hilfsebenen, wie bei dem Schatten des Punktes (X, *x*) gezeigt worden.

Auf die horizontale Projectionsebene projicirt sich der Schatten der ganzen Schraube. Die äußere Spirale hat als Schatten wiederum eine Art von Spirale 6. 7. 8. 9. 10. 11 . . . . Diese wird in den Punkten wie 7, 9, 10, von den Schlagschatten der Trennungslinien beider Gewindflächen berührt.

Praktische Bemerkungen über die Wahl der Lichtstrahlen.

86. In den voranstehenden Beispielen über die geometrische Konstruktion der Schatten bei einer Beleuchtung durch parallele Strahlen ist durchgängig angenommen worden, daß diese Strahlen einen schiefen Winkel mit dem Horizonte, d. h. mit der horizontalen Projectionsebene bildeten, und daß sie meistens zur Linken des Beschauers oder Zeichners einfielen. Wenn diese Annahmen auf den ersten Anblick auch als bloße Willkührlichkeiten erscheinen sollten, oder auch als blindes Befolgen eines einmal üblichen Herkommens, so läßt sich ihre Zweckmäßigkeit doch leicht nachweisen, indem sie ganz mit der, Art. 7, begründeten Ansicht übereinstimmen, daß die Angabe der Schatten auf geometrischen Zeichnungen, unter Zugrundlegung einer hypothetischen Beleuchtungsart geschehen solle, welche der Beleuchtung durch das Sonnenlicht so nahe komme als möglich. Nun aber findet eine günstige Beleuchtung der Körper fürs erste weder am hohen Mittage statt, wo die Schlagschatten fast ganz fehlen, und wo die starke, gleichförmig vertheilte Helle mehr blendet als deutlich macht; noch aber bei Sonnenauf- oder Untergang, wo das Licht schwach, und die Schlagschatten riesenmäßig gestreckt sind; sondern dann, wenn die Sonne, zwischen Zenith und Horizont stehend, ihre Strahlen in schiefer Richtung gegen horizontale und vertikale Flächen sendet. Man sieht, daß hier der Ausdruck „günstigste Beleuchtung" nicht in malerischem Sinne genommen ist, sondern nach dem ganz realen Begriffe des Geometers, der hell, deutlich und klar sehen muß.

Was zweitens die Seite betrifft, woher das Licht am passendsten kommen soll, um einen Gegenstand deutlich zu zeigen, so wird gewiß Niemand einen solchen Gegenstand zwischen sich und die Sonne stellen, weil er dann nur die im Schatten liegenden Seiten erblickte, auch wird man seinen Platz nicht direkt zwischen der Sonne und dem Gegenstande nehmen, weil sonst der eigene Schatten des Beschauers auf den betrachteten Körper fallen würde. Man wird also eine solche Stellung wählen, wo man das Licht zur Seite hat; und zwar zur Linken, um nicht durch den Schlagschatten der rechten Hand gestört zu seyn, die bisweilen beim Halten, Stützen, Untersuchen, oder auch beim Zeichnen des Körpers gebraucht werden muß. Indessen läßt sich nicht verkennen, daß die Foderung, das Licht zur **linken** Seite zu haben, ziemlich konventioneller Natur ist, und wir haben uns aus diesem Grunde auch auf der Tafel VIII eine Abweichung von jener Regel erlaubt.

87. Welchen besonderen schiefen Winkel nun aber die Lichtstrahlen mit der horizontalen und vertikalen Projektionsebene machen sollen, läßt sich durchaus nicht ein für allemal bestimmen; und man muß hier zunächst unterscheiden, ob eine Konstruktion Behufs des Studiums der Schattenlehre geschehen soll, oder um eines praktischen Zweckes willen.

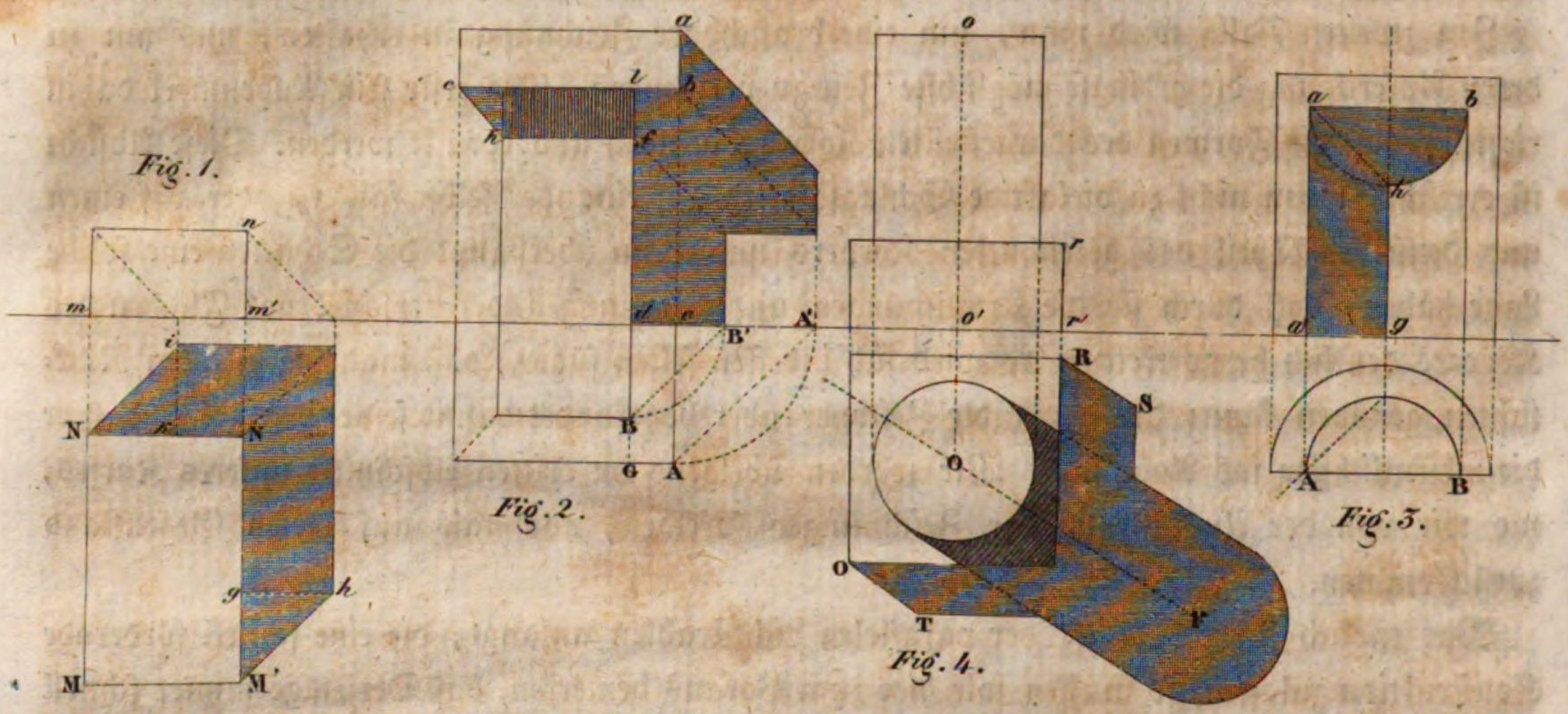
In dem ersten Falle hat man dahin zu sehen, daß einmal die zur Konstruktion dienenden Linien nicht über den Rahmen der Zeichnung hinaus fallen, und dann, daß alle Eigenthüm-

lichkeiten des jeweils vorgelegten Problemes auf bequeme Weise zum Vorschein kommen, nämlich, ohne Verwirrung zu verursachen, noch eine Ueberladung mit Linien.

Im zweiten Falle wird man, um eine brauchbare Zeichnung zu erhalten, und um zu deren Anfertigung die geringst möglichste Zeit zu verwenden, fürs erste sein Augenmerk dahin richten, daß die Formen des dargestellten Körpers deutlich ausgedrückt werden. Diese Absicht ist erreicht, wenn nicht zu vielartige Schlagschatten auf einander selbst fallen, oder auf einen und denselben Theil des gezeichneten Körpers und wenn überhaupt die Schatten eine solche Lage haben, daß durch sie die Krümmungen und Beugungen der verschiedenen Flächen des Körpers deutlich hervortreten. Es wird sich indessen selten fügen, daß man hierin allen Rücksichten genügen kann; der gewandte Zeichner aber beurkundet damit seine Fertigkeit, daß er die wesentlichsten ins Auge faßt. Wir werden übrigens im dritten Abschnitte unseres Kurses, wo wir von der Ausführung der Zeichnungen sprechen, nochmals auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Was endlich jene Richtung der parallelen Lichtstrahlen anlangt, die eine schnell fördernde Konstruktion zulassen, so müssen wir hier zum Voraus bemerken, daß Derjenige immer schnell arbeiten wird, der, bei einiger zeichnerischen Anlage, sich die Theorie der Schattenlehre tüchtig zu eigen gemacht hat, weil dieser bei jedem Beispiele sogleich jene Methode der Konstruktion einschlagen wird, die ihm die Hauptpunkte seiner Schattenkonturen auf die einfachste und sicherste Art liefern. Man pflegt indessen zwei besondere Richtungen der Strahlen anzuwenden, die in Absicht auf expeditive Konstruktionen einige Vortheile gewähren; nämlich die Richtung eines Strahles, dessen beide Projektionen mit der Grundlinie halbe rechte Winkel machen, oder eines Strahles, der mit seiner beliebig angenommenen Horizontal- oder Vertikalprojektion einen Winkel bildet, gleich einem halben rechten. Einige Beispiele werden dienen, dieß zu erläutern.

88. Es ist bekannt, daß jede Diagonale eines Würfels sich auf dessen Seitenflächen als eine Diagonale dieser Seiten projicirt. Ein Lichtstrahl also, welcher gleich dem, auf Seite 4, Figur 1 vorgestellten, zu Projektionen zwei Gerade, **E G**, $e f'$ hat, die mit der Grundlinie halbe rechte Winkel bilden, kann betrachtet werden als in der Diagonale eines mit den Projektionsebenen parallel gestellten Würfels liegend. Aber auch in die Ebene **E G** oder $f f'$ projicirt sich dieser Strahl nach der Diagonale des Quadrates (**F G**, $f f'$), daher ist auch diese Projektion alsobald in der Umlegung oder Umdrehung der genannten Ebene gefunden, und wir haben in vielen Beispielen gesehen, daß man nebst den zwei gewöhnlichen Projectionsebenen noch eine dritte auf ihnen senkrechte Ebene, wie die **F G** nöthig hat. Wenn man sich also für die Ausübung mit einem zum Anschlagen der Reißschiene eingerichteten Reißbrette und mit einem gleichschenklichen Winkelmaße versehen hat, so kann man auf einfache und sichere Weise die Projektionen der Lichtstrahlen in den drei Hauptebenen ziehen.



89. Es sei in der oben stehenden ersten Figur (M N, *m n*) ein rechtwinkliges Prisma, dessen in M′ N, N N′ projicirten Seiten Schatten auf die Horizontalebene werfen. Die ausgeführten Konstruktionen zeigen, daß bei der angenommenen Richtung der Strahlen die Breite *g h* oder *i k* des Schlagschattens gleich wird der Höhe *m′ m* der Prismenseiten.

Die Figur 2 stellt einen an die vertikale Projektionsebene gelehnten rechtwinkligen Pfeiler vor, mit einer eben solchen darüber gelegten Platte. Um den Schlagschatten dieses Körpers im Aufrisse zu zeichnen, ziehe ich zuerst durch die Punkte *a*, *b*, *e* Paralellen mit der Projektion des Lichtes; dann trage ich die Größe des Vorsprunges *d* B von *d* nach B′, so wie *e* A von *e* nach A′; errichte in B′ und A′ zwei Vertikallinien, ziehe durch *h* eine Horizontallinie und die Grenzen meines Schattens sind bestimmt. Die Linien des Grundrisses zeigen die Richtigkeit dieser Konstruktion. Man kann hiebei noch bemerken, daß die Breite *l f* gleich dem Vorsprunge B G seyn muß.

Nicht nur bei polyedrischen, sondern auch bei krummflächigen Körpern gewährt die Annahme eines Lichtstrahles, welcher mit den drei Hauptebenen gleiche Winkel bildet, einige Vortheile, wovon die Figur 3 ein Beispiel giebt. Es zeigt diese Figur einen hohlen Halbcylinder, bedeckt durch eine halbkreisrunde Platte. Der Schlagschatten der Kante (A, *a′ a*) fällt im Aufrisse mit der Mittellinie *g h* zusammen, und der Schatten der horizontalen Kante (A B, *a b*) erscheint in derselben Projektion als ein über dem Durchmesser *a b* beschriebener Kreisbogen. In der Wirklichkeit ist dieser Schatten ein elliptischer Bogen, entstehend aus dem Durchschnitte des Cylinders und einer Ebene, welche durch die schattenwerfende Kante parallel mit

dem Lichte geht. Man sieht aber, daß sich diese Ellipse als Kreis projicirt, weil ihre beiden Axen sich gleich groß darstellen.

90. Dieß Wenige mag hinreichen, um den Leser in Stand zu setzen, in vorkommenden Fällen alle Vortheile zu benützen, welche die in Rede stehende Richtung der beleuchtenden Strahlen zu gewähren vermag. Es ließe sich mancherlei Einzelnes hierüber noch anführen, allein solche auf ganz besondere Fälle gegründete Regeln bleiben nur selten im Gedächtnisse und bis man sich gelegenheitlich dieser Regeln wieder entsinnt, oder das Lehrbuch zu Hilfe holt, hat man nach den leicht zu behaltenden allgemeinen Methoden auch schon die Konstruktion vollendet.

Neben den eben genannten Vortheilen für die Konstruktion, die aus der Annahme eines Lichtstrahles entspringen, dessen Projektionen Winkel von 45° mit der Grundlinie machen, lassen sich jedoch einige Uebelstände nicht verkennen, die aus derselben Annahme hervorgehen. Diese bestehen einmal, eben in der zu großen Regelmäßigkeit der Schlagschatten, die leicht Mißverständnisse erzeugen kann, und dann auch darin, daß man durchaus nicht Herr ist, die Massen der Schlagschatten durch eine zweckmäßige Neigung der Projektion des Lichtstrahles auf diesen oder jenen Theil des vorgestellten Körpers hin, oder von ihm hinweg zu leiten.

91. Die Annahme eines Lichtstrahles, wovon die Figur 4 ein Beispiel giebt, ist frei von derartigen Inkonvenienzen und gewährt doch sehr große Vortheile der Konstruktion. Der beleuchtete Körper ist hier ein, auf viereckigem Sockel stehender gerader Cylinder. Der horizontalen Projektion **O P** eines Lichtstrahles hat man eine Richtung gegeben, um den Schlagschatten an irgend einen zweckmäßig erachteten Ort hinzuleiten; und man nimmt jetzt an, daß die Strahlen mit ihrer horizontalen Projektion Winkel von 45° bilden: ich ziehe also zur Konstruktion der Schlagschatten, an den Kreis, welcher die Horizontalprojektion des Cylinders vorstellt, zwei mit **O P** parallele Tangenten von unbestimmter Länge, eben so führe ich durch **Q** und **R** zwei Parallelen zu **O P**. Hierauf mache ich $\mathbf{R\,S} = \mathbf{O\,T} = r\,r'$, und vollende durch Ziehen von Parallelen mit den Projektionen der Kanten des Sockels durch die Punkte **T** und **S**, dessen Schatten. Die Höhe $o\,o'$ trage ich sodann von **O** nach **P**; beschreibe aus diesem Punkte mit dem Radius des Cylinders einen, die vorhin gezeichneten Tangenten berührenden Halbkreis, und meine Schlagschatten sind bestimmt.

Wenn im Aufrisse ebenfalls bedeutende Schlagschatten zu verzeichnen wären, so hätte ich allerdings durch den, für den Grundriß angenommenen Strahl keinen besondern Vortheil, allein es hindert mich nichts, im Aufrisse den Körper nach einer Richtung beleuchtet anzunehmen, die unabhängig vom Grundrisse ist; also die vertikale Projektion meiner Strahlen willkührlich, d. h. auf passende Weise zu ziehen, und zu unterstellen, daß die Strahlen mit dieser Projektion jetzt wiederum halbe rechte Winkel bilden.

Besondern Nutzen wird die Annahme der Lichtstrahlen, welche in 45° gegen ihre eigenen Projektionen geneigt sind, bei größeren Zeichnungen gewähren, wo Grund- und Aufriß auf verschiedenen Blättern angelegt sind.

Zum Beschlusse dieses Abschnittes über die geometrische Konstruktion der Schatten fügen wir noch die Erklärung der Tafeln X, XI, XII und XIII hier bei, welche die Schattenbestimmung von Maschinentheilen und einigen architektonischen Gegenständen enthalten. Es sind dieß Formen, welche bei Zeichnungen technischer Gegenstände sehr häufig vorkommen. Wir würden überhaupt solchen Personen, welche öfters derartige Zeichnungen zu verfertigen haben, rathen, sich eine kleine Sammlung von Schattenkonstruktionen, der ihnen wichtigsten Formen, einzeln und in ihrer Verbindung anzufertigen.

Zapfenlager mit einem Träger. Tafel X.

92. Die Figur 1 und 2 zeigt die vordere und Seitenansicht, die Figur 3 den Grundriß eines Lagers für den Zapfen einer horizontalen Welle, verbunden mit einem dreischenkeligen Träger; eine Verbindung, welche bei verschiedenen Maschinengattungen angetroffen wird.

In der Seitenansicht ist die Linie $a\ c\ b$, die Projektion des Durchschnittes zweier geraden Cylinder, nicht unmittelbar gegeben, sie muß aus den Figuren 1 und 3 abgeleitet werden, und zwar am einfachsten, indem man beide Cylinder durch horizontale Ebenen geschnitten denkt. Man findet so z. B $a\ b$ (Fig. 2) $=$ $a'\ b'$ (Fig. 3) und trägt die Hälfte dieser Länge von der Axe der Figur 2 rechts und links nach a und b u. s. f.

Die drei Schenkel des Trägers sind durch ebene, oder dieselben berührende cylindrische Flächen begrenzt, und mittelst der Figuren 1 und 2 vollkommen bestimmt. Aus diesen Figuren wird die Gestalt der Schenkel im Grundrisse abgeleitet.

Die Figur 4 zeigt im Grundrisse die untere Schaale des Zapfenlagers von dem der Deckel abgenommen.

93. Zur Verzeichnung der Schatten sind die Projektionen L und l eines Lichtstrahles in der Ebene des Grund- und Aufrisses angenommen und dieser Strahl ist dann nach l' in die umgedrehte Ebene $y\ z$ der Figur 2 projicirt worden.

Die Konstruktion der Trennungslinien von Schatten und Licht hat nur auf den konvex-cylindrischen Theilen zu geschehen, die außer diesen Orten jene Linien durchgehends von scharfen Kanten des Körpers gebildet werden.

Auf den hohlen cylindrischen Theilen nehmen die Schlagschatten an den Punkten, wie

(a'', a, a'), (e, e', e''), (f, f', f''), $(g, g' g'')$ (h, h', h''), (i, i', i'') ihren Ursprung, wo dem Lichte parallele tangirende Ebenen an die verschiedenen Cylinderflächen die begrenzenden Kanten dieser Flächen treffen. Ueber die ferneren Konstruktionen der Schlagschatten bleibt uns hier weiter nichts zu erklären, da derartige Aufgaben bei den Beispielen der vorhergehenden Abschnitte ausführlich genug besprochen worden sind. Nur das wollen wir noch nach anführen, daß bei den Konstruktionen der Figuren 2 und 4 die Projektion l' des Lichtes in der Ebene $y\,z$ oder ihrer parallelen $r'\,i'$ nothwendig ist. Der letztgenannten Figur dient die Figur 1 zum Aufriß und l' als Vertikalprojektion des Lichtes: Eine zu l' parallele Tangente bestimmt den Punkt i, woraus man i' findet, wenn man die Ordinate $r\,i$ von r' nach i' trägt; eine Konstruktion, deren Richtigkeit leicht zu ersehen ist.

Attischer Säulenfuß. Tafel XI.

94. Unter dem Namen attischer Säulenfuß oder Säulenbasis ist in der Architektur der untere Theil einer Säule bekannt, dessen Gestalt in Grund- und Aufriß die gegenwärtige Tafel zeigt. Der ganze Körper, oder vielmehr alle seine Theile können durch gleichzeitige Umdrehung des Profiles der Basis um die Säulenaxe erzeugt werden. Die Richtung der Lichtstrahlen ist in den zwei Projektionen durch Pfeile angegeben. Die Ebene des Aufrisses enthält außerdem noch in der Umlegung einen durch einen Punkt der Axe gehenden Lichtstrahl. Wir wollen die Aufzählung der zu bestimmenden Schatten auf den verschiedenen Theilen des Körpers von oben an beginnen.

Auf dem cylindrischen Schafte der Säule:

Trennungslinie von Schatten und Licht.

Auf dem Ablaufe des Schaftes, gebildet von dem Viertheile einer kreisförmigen Ringfläche:

Schlagschatten der Trennungslinie des Schaftes. Die letztgenannte Linie liegt in einer den cylindrischen Schaft berührenden Vertikalebene; diese Ebene ist auch tangirend an die ringförmige Fläche des Ablaufes und schneidet sie nach einer krummen Linie, den Bogen einer Lemniskate.

Auf dem cylindrischen Plättchen des Ablaufes:

Trennungslinie von Schatten und Licht.

Auf dem ersten Ringe (Pfuhle) der Basis:

Trennungslinie von Schatten und Licht. Schlagschatten der Trennungslinie des obern Plättchens. Schlagschatten der Trennungslinie des Schaftes.

Auf dem ersten Plättchen der Basis:

Schlagschatten des ersten Ringes.

Auf der Einziehung:

Schlagschatten des unteren Randes des ersten Plättchens. Schlagschatten der Trennungslinie des ersten Ringes. Der erste dieser beiden Schlagschatten kann konstruirt werden als

Schnitt eines Cylinders und einer Umdrehungsfläche, indem man horizontale Hülfsebenen anwendet. Der zweite Schlagschatten aber kann nur nach der allgemeinen Methode bestimmt werden, indem man durch beliebige Punkte der Trennungslinie des Ringes Lichtstrahlen führt; sodann die Schnitte konstruirt, welche die projicirenden Ebenen dieser Strahlen in der Oberfläche der Einziehung bilden. Da wo der Umfang des Schnittes und der genommene Lichtstrahl zusammentreffen, ist jeweils ein Punkt des Schlagschattens. Auf der vorliegenden Tafel sind die Schnitte der vertikal-projicirenden Ebenen einiger Lichtstrahlen verzeichnet. Man wird zugleich bemerken, daß die Punkte des Schlagschattens des ersten Plättchens mittelst derselben Hülfsschnitte gefunden werden können.

Auf dem zweiten Plättchen:

Trennungslinie von Schatten und Licht.

Auf dem zweiten Pfuhle:

Trennungslinie von Schatten und Licht. Schlagschatten des zweiten Plättchens; Schlagschatten des ersten Pfuhles. Bei der Konstruktion dieser Schlagschatten sind hier immer Hülfsebenen angewendet, die dem Lichte parallel, auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen.

Auf der horizontalen Projektionsebene.

Schlagschatten der beiden Ringe und des Säulenschaftes.

95. Die Tafel 11 enthält in den Figuren *a* und *b* noch die Schattenbestimmung von einigen Gesimsgliedern.

Figur *a* eine von Kragsteinen gestützte Hängeplatte. Das Gesimse läuft um das rechtwinklige Eck einer Mauer, deren Kante durch die Gerade **P Q** vorgestellt wird. Der rechte Theil der Figur zeigt zugleich das Profil des Gesimses, oder dessen Schnitt durch die vertikale Ebene **P Q**. Ein Grundriß ist hier nicht vorhanden, auch nicht nöthig, da man in der Figur schon die Projektion des Körpers in zwei unter sich rechtwinkligen Vertikalebenen hat.

Die Projektion eines Lichtstrahles in der ersten Ebene (in der Ebene der Zeichnung) ist die Gerade **L**. Derselbe Strahl in die Ebene **Q P** projicirt nimmt nach der Umlegung dieser Ebene die Stellung **L'**.

Dieß zu Grunde gelegt, so wird die Projektion des Schlagschattens auf der Hängeplatte, welcher von deren Riemchen herrührt, durch die Parallele fg zu **L'** bestimmt; eben so konstruirt sich der Schlagschatten des unteren Randes der Hängeplatte auf dem cylindrischen Kragsteine, so wie auf der Wandfläche.

Eine Tangente parallel zu **L'** bestimmt auf dem konveren Theil des Kragsteines die Trennungslinie ($m' \mu \mu'$) von Schatten und Licht; eine zweite Tangente parallel zu **L'** giebt in dem Punkte (n, ν) den Anfang des Schlagschattens, den der Bogen ($m n \mu \nu$) und ein

Stück der Trennungslinie des Kragsteines auf seine eigene Fläche werfen. Der Schatten des Punktes (m, μ) fällt nach (ψ', ψ). Die Linie ($n\,\psi'$, $\nu\,\psi$) ist Schlagschatten des Bogens ($m\,n$, $\mu\,\nu$) und diese Linie hat eine einbeugende Krümmung. Zu bestimmen bleibt noch der Schatten des Kragsteines auf der Wand, in der Weise, wie die Figur es zeigt.

96. Die Figur *b* hat eine der vorhergehenden ganz ähnliche Anordnung, sie zeigt nämlich in zwei Vertikalprojektionen die Gestalt einer Rinnleiste. **L**, ist die Vertikalprojektion eines Lichtstrahles und **L'**, dessen umgelegte Projektion in der Ebene **P Q**. Es ist hier zu zeichnen; auf der cylindrischen Fläche der Rinnleiste: Schlagschatten ihres oberen Randes, Trennungslinie von Schatten und Licht. Auf dem unteren Plättchen: Schlagschatten der Rinnleiste, und auf der Wandfläche; Schlagschatten des unteren Plättchens. Eine Tangente parallel zu **L'** an das Profil der Rinnleiste berührt dasselbe in *e* und giebt dadurch die Projektion *e f* der Trennungslinie von Schatten und Licht auf der sichtbaren Seite des Gesimses an.

Auf der zweiten Seite des cylindrischen Gesimstheiles, nämlich der, so mit der Ebene **P Q** parallel läuft, ist die Trennungslinie von Schatten eine Gerade, welche sich darstellt als der Punkt *g*, der Berührungspunkt des Profiles aus einer zu **L** parallelen Tangente. Ein Stück der letztgenannten Trennungslinie und der Bogen *g e* sind es, welche Schlagschatten auf das untere Plättchen werfen.

Dorisches Kapitäl. Tafel XII.

97. Die Tafel zeigt die Schatten eines griechisch-dorischen Säulenkapitäles und eines Stückes des kannelirten Schaftes. Die Höhe der Säule ist, wie es meistens geschieht, zu sechs untern Durchmessern angenommen; ihr Schaft hat, abgesehen von den Kannelirungen, die Gestalt eines abgestumpften geraden kreisförmigen Kegels, dessen oberer Durchmesser um ein Sechstheil kleiner ist als der untere. Die Kannelirungen sind selbst Stücke schiefer kreisförmiger Kegelflächen mit kreisförmigen Grundlinien, deren Bogenweite 60 Grade beträgt; sie endigen sich oben in nischenförmigen Abrundungen. Am Halse der Säule ist ein Einschnitt, eine Erweiterung der Fuge, deren Oberfläche zwei Kegeln angehört.

Die zu verzeichnenden Schatten sind:

1) Der Schlagschatten der viereckigen Deckplatte auf dem Wulst des Kapitäles.

Die schattenwerfende Linie ist hier der untere Rand der Platte, daher jener Schlagschatten als Durchschnitt der Umdrehungsfläche des Wulstes und der Ebene, die den Schatten enthält, betrachtet, und seine Konstruktion entweder nach der allgemeinen Methode der Hülfsschnitte geschehen kann, oder aber nach der Methode, welche den Schnitt einer Ebene und einer Umdrehungsfläche zu zeichnen lehrt. (D. G. Art. 240. sqq.) Im letzteren Fall bestimmt man zuerst den Punkt (**S**, *s*) wo die Ebene des Schlagschattens die Axe der Säule durchschneidet,

indem man **S J** parallel zu **L** zieht, den Punkt **J** vertikal nach *j* projicirt und durch letzteren die Parallele *j s* zu **L′** führt. Denkt man nun die Schattenebene mit sammt ihrem Schnitte in der Umdrehungsfläche um die Axe dieser letzteren gedreht, bis in die zur vertikalen Projektionsebene senkrechte Stellung, so kommt die Gerade (**K S**, *k s*) nach (**S K′**, *s* ϰ) zu liegen; und *s* ϰ ist zugleich vertikale Projektion der umgedrehten Ebene. Irgend eine Horizontalebene *u* ϱ zwischen den Punkten *v* und *w* schneidet nun die Umdrehungsfläche nach einem Kreise vom Radius *r* ϱ, sie schneidet die Schattenebene nach einer Parallelen zu (*j* ϰ, **J K**), deren Abstand von der Säulenaxe = *r q* ist. Die Begnungspunkte (**U**, *u*), (**T**, *t*) der beiden Schnitte gehören daher der gesuchten Grenze des Schlagschattens an.

2) Trennungslinie von Schatten und Licht auf dem Wulste: Man konstruirt diese Kurve entweder mittelst der Schnitte oder nach der besondern für alle Umdrehungsflächen gegebenen Methode. (Art. 67).

3) Schlagschatten des Randes der Deckplatte, so wie der Trennungslinie des Wulstes auf den Kannelirungen:

Man nimmt auf den schattenwerfenden Linien Punkte an, führt durch sie Parallele mit dem Lichte, und sucht die Begegnungspunkte dieser mit den kegelförmigen Oberflächen der Kannelirungen; eben so arbeitet man

4) bei den Schlagschatten auf der Oberfläche des Einschnittes.

5) Schlagschatten der Kannelirungen in sich selbst.

Da hier der gemeinsame Scheitel der verschiedenen Kegelflächen nicht mehr erreicht werden kann, so arbeitet man ganz ähnlich, wie bei den kegelförmigen Abweissteinen des sechsten Beispieles (Art. 60).

Jonisches Kapitäl. Tafel XIII.

98. Die Tafel giebt uns die Zeichnung des Kapitäles einer Säule jonischer Ordnung in allen nöthigen Projektionen und Durchschnitten, und sie bietet ein Beispiel, wie man sich bei der Schattenbestimmung auf Körpern zu benehmen habe, deren Gestalt nicht durch eine streng definirte Erzeugungsart festgesetzt ist.

Von dieser Beschaffenheit ist der Kanal der Voluten und das Polster derselben.

Es ist natürlicher Weise nicht möglich, irgend eine graphische Konstruktion auf einer Fläche auszuführen, deren Erzeugungsart man nicht kennt, oder von der nicht eine hinlängliche Anzahl einzelner Punke gegeben sind.

Hat man in einem solchen Falle den Körper selbst oder ein Modell von ihm vor sich, so kann man auf seiner Oberfläche ein beliebiges System von Linien ziehen, diese aufnehmen und in der Projektion festsetzen. Diese Linien dürfen dann als die Erzeugungslinien der Fläche betrachtet werden, und mittelst ihrer kann man nach den allgemeinen Methoden der darstellen-

den Geometrie alle Aufgaben lösen, die in Bezug auf jene Fläche gestellt seyn mögen, als die Bestimmung ihrer Trennungslinie von Schatten und Licht, die Konturen des auf sie fallenden Schlagschattens u. s. f. Ja, man kann sogar den Körper einer geeigneten Beleuchtung aussetzen, und die Konturen seiner Schatten, wie andere Linien von ihm aufnehmen. In dem vorliegenden Falle aber läßt sich die Benutzung eines Modelles umgehen. Man kann sich vorstellen, die Oberfläche des Polsters z. B. seie erzeugt durch die Volute, welche in der Ebene *f g* (Fig. 3) enthalten ist, und deren wahre Gestalt sich in Figur 4 oder besser noch in Figur 1 vorstellt, wobei sich die Ebene dieser Kurve parallel zu sich selbst fortbewegt, die Kurve aber ihre Gestalt dermaßen ändert, daß sie sich, wenn die Ebene in *i h* angekommen ist, in die Linie *m n o* (Fig. 4) umgewandelt habe. Die scheinbaren Umrisse des Polsters in den Figuren 2 und 3 leiten die Formveränderung der Erzeugungslinie dadurch, daß sie für jede Stellung dieser Linien vier Tangenten an dieselbe bestimmen. Nachdem man eine Reihe von derartigen Erzeugungslinien festgesetzt hat, wozu sich die Figuren 3 und 4 am bequemsten eignen, bestimmt man sofort die Schatten nach der allgemeinen Methode, indem man die Oberfläche des Polsters durch Ebenen schneidet, welche dem Lichte parallel sind, und die etwa auf der Ebene der Figur 3 senkrecht stehen. Diese Schnitte werden in die Ebene der Figur 4 projicirt, an diese Projektionen parallel mit der Projektion des Lichtes Tangenten gezogen, deren Berührungspunkte der Trennungslinie von Schatten und Licht angehören. Mittelst derselben Schnitte findet man dann noch den Schlagschatten des Randes *f g* auf der Oberfläche des Polsters.

Bei dem Schlagschatten in dem Kanale der Volute auf der Fronte des Kapitäles wird man ähnlicherweise verfahren.

Von der Beleuchtung durch Körper mit endlichen Dimensionen und von den Halbschatten.

99. Wir kommen in unserm Kurse der Schattenlehre nun zu dem Falle, wo die Beleuchtung durch einen Körper von endlichen Dimensionen geschieht, der sich zugleich in endlicher Entfernung von den beleuchteten Gegenständen befindet.

Um eine klare Vorstellung zu gewinnen, nehmen wir an, der leuchtende Körper habe eine konvex gekrümmte Gestalt. Jedweder Punkt seiner Oberfläche wird hier als strahlender Punkt wirken, und sein Licht nach allen Theilen des Raumes senden, die sich diesseits der Ebene befinden, welche den Lichtkörper in dem betrachteten Punkte berührt; denn die eigene Materie des Körpers und seine Krümmung verhindert die Strahlen, welche noch außerdem von jenem Punkte ausgehen könnten, in die übrigen Regionen des Raumes zu gelangen.

Wenn bei der Beleuchtung durch einen strahlenden Punkt jeder andere Punkt des Raumes nur von einem einzigen Strahle erhellt wird, so sind in dem jetzigen Falle die Helligkeiten der verschiedenen Punkte des Raumes durchaus ungleich, denn die Masse der Strahlen,

welche von dem leuchtenden Körper nach irgend einem Punkte hin gelangen können, wird durch das Volumen des Kegels gemessen, welcher aus jenem Punkte als Scheitel um den Lichtkörper umschrieben ist; dieß Volumen zwischen dem Scheitel und dem Lichtkörper aber ist im Allgemeinen für jeden andern Punkt des Raumes ein Anderes.

Nach unserer bisherigen Voraussetzung, daß nur ein einziger leuchtender Gegenstand im Raume vorhanden sei, und daß kein beleuchteter Körper Licht zurückstrahle, müssen die Schatten, wenn die Beleuchtung nur von einem Punkte im Raume ausgeht, vollkommen schwarz, und ihre Umrisse scharf ausgesprochene Linien seyn. Hat aber der leuchtende Gegenstand drei Dimensionen, und befindet er sich in einer endlichen Entfernung von den beleuchteten Körpern, so kann der letzte Umstand nicht mehr statt finden, die Schatten müssen vielmehr in unmerklicher Abstufung vom tiefen Schwarz zur Helle übergehen.

100. Denken wir uns in der That den beleuchteten Körper vorerst ebenfalls von einer einzigen Fläche mit konvexer Krümmung eingeschlossen. Durch einen beliebigen Punkt dieser Fläche führen wir eine tangirende Ebene an dieselbe. Diese Ebene kann gegen den leuchtenden Körper in einer doppelten Stellung sich befinden, sie kann nämlich in ihrer Verlängerung mit jenem Körper zusammentreffen oder nicht mit ihm zusammentreffen. Es soll das Letztere statt finden, und es soll der Lichtkörper sich in Bezug auf den dunkeln Körper jenseits der tangirenden Ebene befinden; so sage ich, der genommene Berührungspunkt ist vollkommen erhellt; denn alle Strahlen, die sich in dem Kegel eingeschlossen befinden, der als Scheitel den genommenen Punkt hat, und der um die Oberfläche des leuchtenden Körpers umschrieben ist, gelangen zu jenem Punkte, weil durchaus nichts sich ihrem Wege entgegenstellt. Befinden sich aber beide Körper, der leuchtende und der beleuchtete, auf einer Seite der vorhin genannten tangirenden Ebene, so kann nicht ein Lichtstrahl zu dem Berührungspunkt gelangen, er müßte denn den dunkeln Körper selbst vorher durchdringen.

Die tangirende Ebene soll nun aber den leuchtenden Körper erreichen, und es kann dieß wiederum auf zwei verschiedene Arten geschehen; die Ebene kann nämlich den Körper durchschneiden oder ihn ebenfalls berühren. Der letzte Fall werde angenommen, nämlich die Ebene berühre den dunkeln und den leuchtenden Körper, und außerdem noch seien beide Körper auf einerlei Seite der Ebene, so sage ich, der Berührungspunkt auf dem dunkeln Körper kann noch von einem einzigen Strahle erhellt werden, und zwar in der Richtung der geraden Linie, welche die beiden Berührungspunkte verbindet; denn alle übrigen Strahlen des Lichtkegels, welcher den Punkt des dunkeln Körpers als Scheitel hat, werden von diesem Körper selbst aufgefangen.

Die Ebene berühre noch immer alle zwei Körper, allein sie befinde sich zwischen beiden, so daß der eine Körper auf einer Seite vor ihr liegt, und der andere auf der andern Seite.

Jetzt ist der Berührungspunkt noch ganz erhellt; kein Strahl in dem Kegel, der um den leuchtenden Körper von dem Berührungspunkte des dunkeln Körpers aus umschrieben ist, wird diesem Punkte entzogen.

Der auf dem dunkeln Körper genommene Berührungspunkt liege nun endlich so, daß die tangirende Ebene an diesem Punkt den Lichtkörper durchschneidet, was sie nach einer gewissen krummen Linie thun wird. Hier ist der Brrührungspunkt zwar erhellt aber nur unvollkommen; denn wenn man für den genommenen Punkt seinen Strahlenkegel konstruirt, so liegt die tangirende Ebene im Innern dieses Kegels; sie theilt ihn in zwei Theile, und nur die Strahlen des einen Theiles können zu dem beleuchteten Punkte hingelangen, die andern sind durch die Krümmung des dunkeln Körpers selbst davon abgehalten.

Es giebt also auf dem dunkeln Körper in Hinsicht der Helligkeit dreierlei Stellen, ganz erhellte, ganz im Schatten liegende, und solche, die nur unvollkommen oder theilweise beleuchtet sind. Von den letzteren sagt man, sie liegen im Halbschatten. Im Gegensatze hievon pflegt man den vollkommenen Schatten Kernschatten zu nennen.

101. Denken wir uns jetzt an den leuchtenden Körper und an den beleuchteten eine Ebene gelegt, welche sie beide berührt und zwar so, daß die Ebene beide Körper auf einer und derselben Seite hat. Stellen wir uns vor, die Ebene mache eine unendlich kleine Drehung, ohne dabei aufzuhören, beide Körper, jeden in einem Punkte zu berühren, oder vielmehr denken wir uns eine zweite tangirende Ebene an die zwei Körper gelegt, unendlich nahe bei der ersten, so werden diese zwei Ebenen sich nach einer geraden Linie durchschneiden, welche als gemeinschaftliche Tangente an die zwei Körper angesehen werden kann. Unendlich wenig verschieden von der zweiten legen wir eine dritte, beide Körper berührende Ebene, diese wird die zweite Ebene jetzt nach einer zweiten Geraden durchschneiden, die wiederum eine Tangente an den leuchtenden und den dunkeln Körper ist und die selbst die erste Tangente durchschneidet, weil sie mit ihr in der zweiten tangirenden Ebene liegt. Sodann nehmen wir eine vierte tangirende Ebene an, welche die dritte durchschneidet, und sofort, bis wieder in die Stellung der ersten Ebene. Wir erhalten so eine auf einander folgende Reihe von geraden Linien, deren jede die zwei Körper berührt. Diese Linien zusammen bilden eine krumme Fläche, und zwar eine aufwickelbare Fläche, weil je zwei und zwei jener auf einander folgenden geraden Erzeugungslinien in einer Ebene liegen. (D. G. Art. 95).

Die aufwickelbare Fläche, welche wir auf diese Weise erzeugen, umhüllt gleichzeitig den leuchtenden und den beleuchteten Körper; und sie umschließt jenseits des zweiten Körpers den Theil des Raumes, wohin durchaus kein Lichtstrahl kommen kann, den Raum des Kernschattens. Wirft der beleuchtete Körper seinen Schatten auf eine rückwärtsliegende Fläche, so muß der Schlagschatten innerhalb des Schnittes dieser Fläche mit jener aufwickelbaren vollkommen und gleichförmig schwarz seyn.

Nun denken wir uns eine zweite Reihe tangirender Ebenen an die Oberflächen des leuchtenden und des dunkeln Körpers gelegt, nämlich die Reihe jener Ebenen, welche, zwischen den Körpern liegend, sie von entgegengesetzten Seiten berühren. Diese Ebenen geben einer neuen aufwickelbaren Fläche die Entstehung, welche, gleich der so eben betrachteten, die zwei Körper umhüllt, und jeden nach einer gewissen krummen Linie berührt. Aber jede gerade Erzeugungslinie der zweiten aufwickelbaren Fläche ist eine Tangente an die zwei gegebenen Körper, die zwischen beiden liegt; und aus dieser Lage folgt, daß man von jedem Punkte des Raumes außerhalb jener zweiten aufwickelbaren Fläche den Lichtkörper ganz gewahre, ohne daß irgend ein Theil desselben durch den dunkeln Körper verdeckt werden könnte. Aber innerhalb der zweiten Fläche, daß heißt in dem Raume zwischen ihr und der ersten aufwickelbaren Schattenfläche und jenseits ihrer Berührungslinie mit dem dunkeln Körper ist die Helligkeit unvollkommen, es ist hier Halbschatten; denn, wo man in diesem Raume einen Punkt nehmen mag, so ist für diesen Punkt ein Theil des leuchtenden Körpers durch den dunkeln Körper verdeckt.

Wird der Schnitt konstruirt, den die zweite aufwickelbare Fläche in jener Fläche macht, worauf der Schatten des dunkeln Körpers fällt, so ist außerhalb des Schnittes auf der Fläche vollkommene Helligkeit; zwischen diesem Schnitte aber und jenem, welcher von der ersten Schattenfläche gemacht worden, liegt ein, im Allgemeinen ringförmig gestalteter Flächenraum, der sich im Halbschatten befindet. Alle Punkte dieses Halbschattens, welche nahe an der Anfangslinie des Kernschattens liegen, sind nur sehr schwach erhellt, weil der größte Theil des leuchtenden Körpers für sie von dem dunkeln Körper verdeckt wird. Die Punkte des Ringes hingegen in der Nähe des Schnittes der Halbschattenfläche sind ziemlich stark beleuchtet, denn nur ein kleines Segment des Lichtkörpers wird ihnen durch die Zwischenstellung des dunkeln Körpers entzogen. Der Schlagschatten des beleuchteten Körpers auf der hinter ihm liegenden Fläche besteht also aus zwei Theilen, einem mittleren, vollkommen dunkeln Theile und aus einem ringförmigen Halbschatten; dieser Halbschatten geht von dem Umfange des Kernschattens an ganz allmählig in die vollkommene Helle über.

Ein solch unmerkliches Uebergehen vom tief Dunkeln ins hell Beleuchtete findet in allen Punkten des Halbschattenraumes statt und auch auf der Oberfläche des beleuchteten Körpers.

Diese Oberfläche wird nämlich von jeder der zwei aufwickelbaren Schattenflächen nach einer krummen Linie berührt, deren Punkte im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegen. Die Berührungslinie mit der aufwickelbaren Fläche des Kernschattens bildet auf der Oberfläche des dunkeln Körpers die Trennungslinie des Theiles, welcher vom Lichte durchaus abgewendet ist, und jenes, wohin Licht gelangen kann. Die Berührungslinie mit der aufwickelbaren Grenzfläche des Halbschattens bildet eben so die Trennungslinie jenes Theiles der Oberfläche des dunkeln Körpers, welcher ganz vom Lichte erhellt wird, und desjenigen, dessen Punkten

durch die Krümmung der Oberfläche selbst ein gewisser Theil der Lichtstrahlen entzogen wird. Auf dieser Oberfläche befindet sich daher zwischen dem ganz dunkeln und dem ganz erhellten Theile eine Zone des Halbschattens, der in steter Abnahme vom Dunkeln ins Helle übergeht.

102. Die vorstehende Theorie kann in gewissen Fällen äußerst einfach und augenfällig werden. Es seien z. B. der leuchtende und der dunkle Körper, beide Kugeln, und es sollen diese Körper in Projektion auf einer Ebene, in der ihre Mittelpunkte liegen, durch die zwei Kreise der Figur *m* Tafel VIII vorgestellt seyn, von denen der größere mit dem Mittelpunkte **S** der leuchtenden, und der andere mit dem Mittelpunkte **R** der beleuchteten Kugel angehört.

Eine auf die Gerade der Mittelpunkte senkrechte Ebene **T U** sei die Fläche, worauf der Schatten der dunkeln Kugel geworfen wird. Alle tangirenden Ebenen, welche die zwei Kugeln von Außen berühren, geben, wie bekannt, in ihren auf einander folgenden Durchschnitten einer geraden kreisförmigen Kegelfläche die Entstehung, deren Scheitel auf der Geraden **R S** jenseits der kleineren Kugel liegt. Diese Kegelfläche, welche in der Figur durch die äußeren Tangenten **F A P**, **F′ A′ Q** an die zwei Kreise bezeichnet wird, repräsentirt jetzt die erste aufwickelbare Fläche, von der wir im vorigen Artikel gesprochen haben; sie schließt jenseits der dunkeln Kugel den Raum des Kernschattens derselben ein, und ihr Schnitt in der Ebene **T U** ist ein Kreis von einem Durchmesser gleich **P Q**, dessen Inneres durchaus keinem Lichtstrahle zugängig ist.

Die aufwickelbare Fläche des Halbschattens, welche gebildet wird aus den auf einander folgenden Durchschnitten einer Ebene, die auf beiden Kugeln hingleitet, indem sie dieselben stets von entgegengesetzten Seiten berührt, ist nun ebenfalls eine Kegelfläche, deren Scheitel aber zwischen beiden Kugeln auf der Geraden ihrer Mittelpunkte liegt. Diese Kegelfläche hat als äußerste Erzeugungslinien die inneren Tangenten **U L G**, **T L G′** an die Kreise **R** und **S**. Ganz offenbar kann keinem Punkte des Raumes außerhalb dieser zweiten Kegelfläche durch die dunkle Kugel ein Lichtstrahl entzogen werden; auch ist der Schnitt derselben Fläche mit der Ebene **T U** im Kreis vom Durchmesser **T U**, außerhalb welcher die Ebene durch die Kugel **S** ganz erhellt wird.

Allein in dem Raume, den die zwei Kegelflächen zwischen sich einschließen, anfangend bei ihren Berührungslinien mit der dunkeln Kugel, ist die Beleuchtung nur unvollkommen, weil von jedem Punkte dieses Raumes nicht mehr die ganze leuchtende Kugel, sondern nur ein Stück von ihr sichtbar ist. Man nehme als Beispiel den ringförmigen Raum der Ebene **T U**, der zwischen die zwei Kreise **P Q** und **T U** eingeschlossen ist. Ein Punkt *p* dieses Raumes auf dem Durchmesser **T U** würde, ohne das Daseyn der dunkeln Kugel, durch alle jene Strahlen erhellt werden, welche das Volumen des Kegels bildeten, der aus *p* als Scheitel um die Kegel **S** umschrieben wäre. Man sieht aber, daß eine tangirende Ebene *p q* aus *p* an die Kugel **R** jenen Strahlenkegel in zwei Theile theilt, und daß also, wenn man aus *p* auch um die Kugel **R** einen Kegel beschreibt, dieser zweite Kegel noch in das Innere des Strahlenkegels

eingreifen müsse, daß er die Kugel **S** durchschneiden werde, und daß folglich nur von dem Stücke der Lichtkugel außerhalb dieses Schnittes Strahlen nach dem Punkte p gelangen können.

Die Figur zeigt auch deutlich, daß, wenn man den Punkt in p', näher bei dem Kreise **P Q** genommen hätte, der aus p' um die Kugel **R** umschriebene Kegel einen großen Theil der Kugel **S** einschließen würde, und daß nur ein kleines Segment dieser Kugel den Punkt p' noch erhellen könnte. Würde man dagegen einen Punkt näher an dem Umfange des Kreises **T U** nehmen, so könnte dieser von einem viel größeren Theile der Lichtkugel, also viel stärker erhellt werden. Der Halbschatten der Kugel **R** auf der Ebene **T U** wird daher von dem Umfange des Kernschattens an immer heller, bis zu dem Umfange des Kreises **T V**, dessen Punkte vollständig beleuchtet sind, oder wenn man von diesem Kreise anfängt, so wird der Halbschatten immer dunkler bis zu den Punkten des Umkreises **P Q**, wo eine gänzliche Verfinsterung der Ebene **T U** anhebt.

Auf der Oberfläche der dunkeln Kugel findet dieselbe Erscheinung statt. Diese Oberfläche wird von der ersten Kegelfläche nach einem kleinen Kreise berührt, der sich als die Sehne **A A'** projicirt, und dieser Kreis trennt das in vollkommenem Schatten liegende Stück der Kugelfläche von dem erhellten Theile. Die Berührungslinie der Kugelfläche mit dem zweiten Kegel ist ein kleiner Kreis, der sich in **B B'** darstellt, und dieser scheidet die ganz erhellten Punkte der Kugel von den nicht mehr ganz erhellten. Die Zone der Kugel zwischen den Kreisen **A A'** und **B B'** ist nur unvollständig und ungleichförmig beleuchtet; sie befindet sich im Halbschatten. Nahe bei dem Kreise **A A'** ist die Beleuchtung sehr schwach, weil die Punkte der Kugel in dieser Gegend nur von einem ganz kleinen Theile der leuchtenden Kugel beschienen werden können; die Helligkeit nimmt zu, so wie man sich dem Kreise **B B'** nähert, ohne daß übrigens irgendwo ein bemerkbarer Absprung zum Vorschein kommen könnte.

103. Sollte die vorliegende Aufgabe in dem allgemeinen Falle graphisch gelöst werden, wenn der leuchtende und der dunkle Körper irgend eine gegebene Gestalt hätten, so würde ich in folgender Weise arbeiten. Ich projicirte die zwei Körper in irgend eine Ebene, z. B. in eine Vertikalebene; ich bestimmte den scheinbaren Umriß dieser Projektionen, nämlich jene Linie, welche die Projektionen aller auf den Oberflächen der Körper gezogenen Linien umhüllt, und ich bestimmte zugleich auf den Körpern selbst die Linie, welche sich als jener scheinbare Umriß in der Projektion darstellt, dann würde ich an die so gezeichneten Projektionen der zwei Körper die äußeren Tangenten ziehen, deren es im Allgemeinen wenigstens zwei geben wird; diese Tangenten stellten tangirende Ebenen an die zwei Körper vor, die der Projektionsebene senkrecht wären; ihre Berührungspunkte, welche auf der Linie des scheinbaren Umrisses lägen, gäben dann in jeder Ebene einmal eine Erzeugungslinie der aufwickelbaren Grenzfläche des Kernschattens an; so wie sie auf der Oberfläche des dunkeln Körpers der Trennungslinie dieses Schattens angehörten. Die inneren Tangenten an die zwei scheinbaren Umrisse be-

stimmten mir eben so Erzeugungslinien der Grenzfläche des Halbschattens, und Punkte der Trennungslinien dieses Schattens auf dem beleuchteten Körper. Nachdem diese Operationen vollendet, würde ich eine neue Ebene aufstellen, die Körper jetzt in diese projiciren und auf den erhaltenen Projektionen arbeiten wie vorhin; auf solche Weise würde ich mit Anwendung neuer Projektionsebenen so lange fortfahren bis die nöthige Anzahl von Elementen zu Verzeichnung der Schatten konstruirt wären.

104. Wir werden indeß diese Konstruktionsart nicht auf bestimmte Beispiele anwenden; denn die ganze Aufgabe kommt einmal bei geometrischen Zeichnungen nicht vor, und wenn ein Maler auch einmal in den Fall gesetzt würde, eine Szene darzustellen, die von einem irdischen Gegenstande von regelmäßiger Gestalt beleuchtet wäre, so müßte er Theils der Zusammengesetztheit der Konstruktionen wegen, vorzüglich aber der vielen bei solcher Beleuchtung mitwirkenden Nebenumstände willen, suchen, seine Studien unmittelbar nach der Natur zu machen. Allein einem geometrisch gebildeten Zeichner darf die theoretische Lösung unserer Aufgabe schon aus allgemeinen Gründen nicht unbekannt seyn; dann ist sie aber auch dem Zeichner wichtig, der die Lichteffekte überhaupt studiren will; denn es giebt in der Natur keinen Körper, dessen Oberfläche, dem Lichte ausgesetzt, durchaus keines zurückstrahlte. Manche Körper thun dieß allerdings in sehr geringem Grade, andere dagegen sehr stark; jeder beleuchtete Körper wirkt dadurch wenigstens auf seine nächste Umgebung wiederum als leuchtender Körper: so wird der Schatten eines Gegenstandes fast immer von dem zurückgeworfenen Lichte eines andern Körpers erhellt, und darum sehen wir auch in der Natur beinahe niemals absolut schwarze Schatten, sondern es sind diese in der Regel durch eine verschiedenartig gekreuzte Beleuchtung gemildert und gebrochen. Die Untersuchungen dieser Art führen uns dahin, die Stärke der Beleuchtung und der Färbung auf den verschiedenen Punkten der Oberfläche der Körper zu bestimmen, womit die vollständige Theorie der Schatten sich schlösse. Da dieß indessen nicht wohl geschehen kann, ohne die Feststellung gewisser Begriffe und Vorstellungen, die wir in der Perspektive ausführlich zu besprechen haben, so werden wir den Gegenstand erst nach dem Vortrage der Linearperspektive wieder aufnehmen, hier aber noch einige Bemerkungen über die Halbschatten beifügen.

105. Wenn die zwei Körper der Figur *m* (Tafel **VIII**) ihre Stellung gegenseitig nicht ändern, wohl aber die Ebene **T U**, parallel mit sich selbst, sich der Kugel **R** nähert, oder von ihr entfernt, so wird die Breite **Q U** des Halbschattens abnehmen oder wachsen, stets aber proportional seyn, zur Entfernung der Ebene von der schattenwerfenden Kugel. Außerdem wird diese Breite abhängen von der Größe des Winkels **Q U**, den die zwei Erzeugungslinien **Q A′ F′**, **U B′ G** der die Kugeln umhüllenden Kegelflächen bilden; ein Winkel, der selbst wiederum von der Entfernung der zwei Kugeln abhängt, und von ihren Dimensionen.

Wenn wir annehmen, die Sonne sei der leuchtende Körper und der beleuchtete die Erde,

so ist bei der mittlern Entfernung der zwei Weltkörper von 23578 Erdhalbmessern der Punkt r so nahe an der Erde, daß er auf dieser selbst liegend betrachtet werden darf, und der Winkel $Q\,r\,U$ ist nicht bemerkbar verschieden von einem halben Grade, einem Winkel, unter welchem man im Mittel die Sonne von der Erde aus gewahrt, und welcher unter der Benennung des scheinbaren Sonnendurchmessers bekannt ist. Das Verhältniß $\frac{Q\,T}{r\,Q}$ der Breite des Schlagschattens, den der Punkt r auf die Ebene **T U** wirft, welche auf dem Sonnenstrahle senkrecht steht, zu der Entfernung jenes Punktes von der Ebene ist daher nahe zugleich dem umgekehrten Verhältniß des Radius zur Tangente von $^1/_2{}^0$ d. i. $= {}^1/_{115}$.

Es leuchtet ein, daß wenn die Ebene **T U** auf den Lichtstrahlen nicht mehr senkrecht stünde, sondern schief, die Breite des Halbschattens wachsen würde und zwar ziemlich genau im umgekehrten Verhältnisse zu dem Sinus des Winkels, den die Ebene mit der Richtung der Lichtstrahlen bildete. Wenn so z. B. der Winkel $r\,Q\,U$ statt nahe zu 90^0 nur 45^0 betrüge, so fände man die Breite des Halbschattens $= Q\,U\,\sqrt{2} = {}^1/_{115} \times \sqrt{2} = {}^1/_{81}$, d. h. bei jenem Neigungswinkel der Ebene wäre die Größe des Halbschattens gleich dem 81. Theil der Entfernung des schattenwerfenden Punktes von seinem Schatten auf der Ebene.

Das Wachsen der Halbschatten mit der zunehmenden Entfernung des schattenwerfenden Körpers von der beschatteten Fläche zeigt sich sehr deutlich, wenn man bei hohem Stande der Sonne den Schatten eines Baumes betrachtet, wo man die Schatten der Blätter nahe an der Erde scharf begrenzt finden wird, und neben ihnen die Schatten entfernterer Blätter mit ganz unbestimmten Konturen.

Die voranstehenden Bemerkungen werden hinreichen, um auf Zeichnungen die Ausdehnung der Halbschatten mit einer Genauigkeit zu bestimmen, wie sie für diesen Zweck nur gewünscht werden kann.

Zu unserer Figur zurückkehrend, bemerken wir noch, daß die Kugelzone zwischen den zwei Kreisen **A A′**, **BB′** sich ebenfalls im Halbschatten befinde. Wenn man durch die Berührungspunkte die Radien **B′ R**, **A′ R** zieht und beachtet, daß der Winkel dieser Radien gleich ist dem Winkel der zwei auf ihnen senkrechten Tangenten, so ergiebt sich hierin ein Maaß für die Breite jener Halbschattenzone.

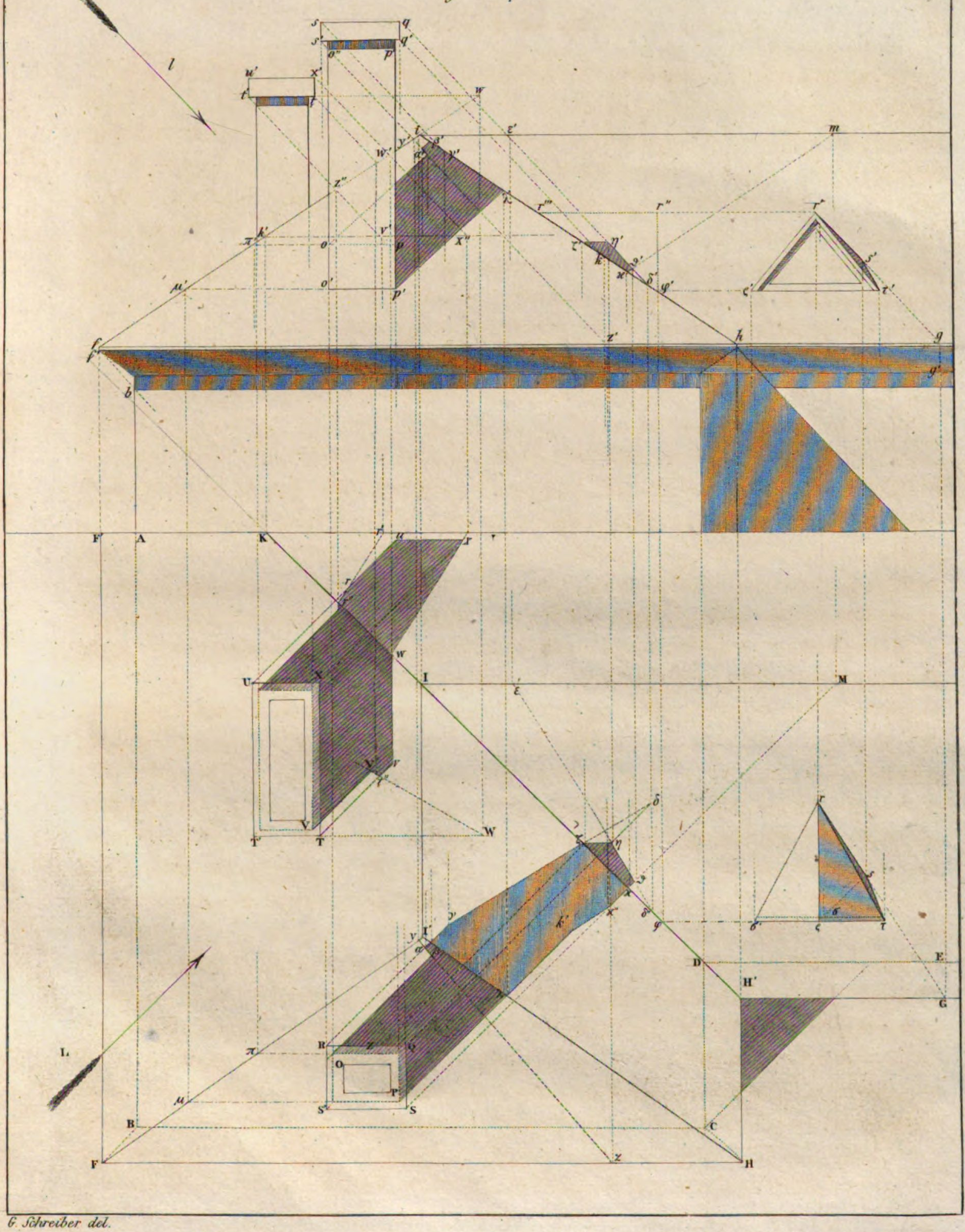
Wenn das Licht von der Sonne ausgeht, so ist der Winkel der Tangenten für jeden Punkt der Erde beiläufig gleich einem halben Grade, woraus sich schließen läßt, daß die Ausdehnung des Halbschattens auf der Kugel **R** ziemlich genau gleich sei dem 115. Theile des Radius.

Man kann dieß Ergebniß ganz gut auf krumme Flächen von jeder Form ausdehnen, wenn man, um die Breite des Halbschattens in irgend einem Punkte der Trennungslinie von Schatten und Licht dieser Fläche zu finden, durch den genommenen Punkt und parallel mit der Richtung des Lichtes eine Normalebene zu der krummen Fläche führt, und den 115. Theil vom Krümmungshalbmesser des Schnittes jener Ebene und der Fläche nimmt.

Zeichnungslehre.

Schatten - Constructionen.

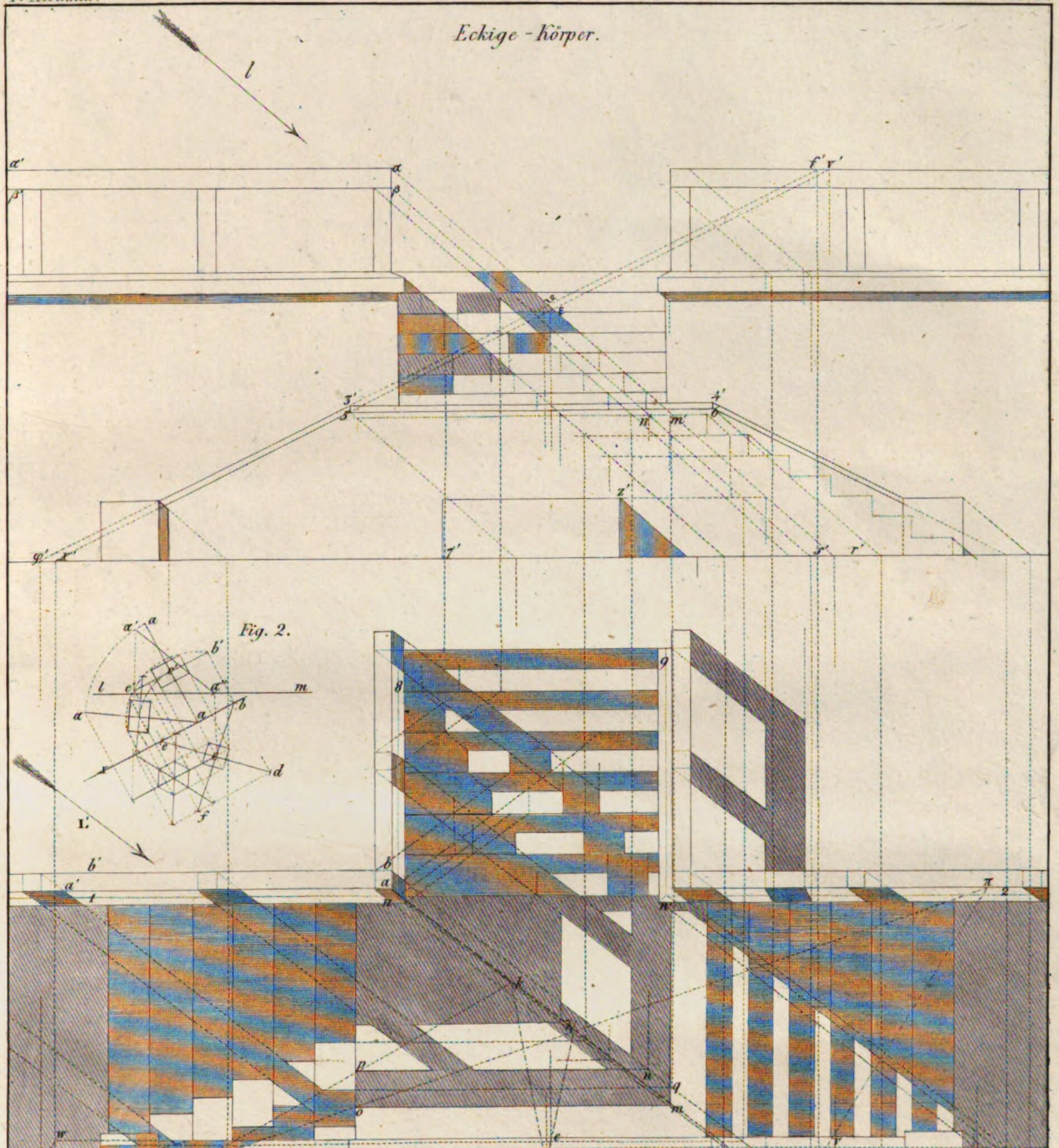
Eckige - Körper.



G. Schreiber del.

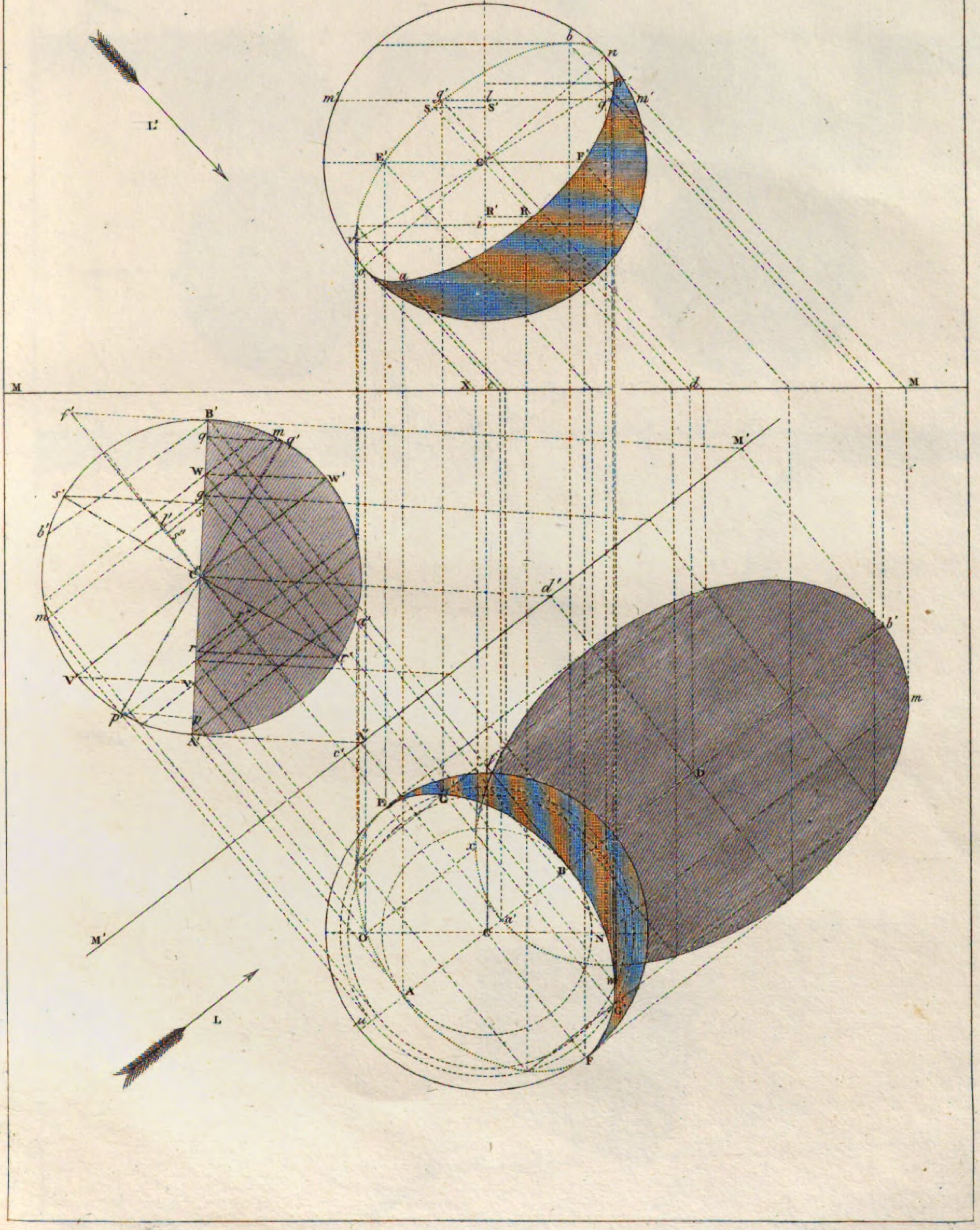
Zeichnungslehre.

Schatten - Constructionen.



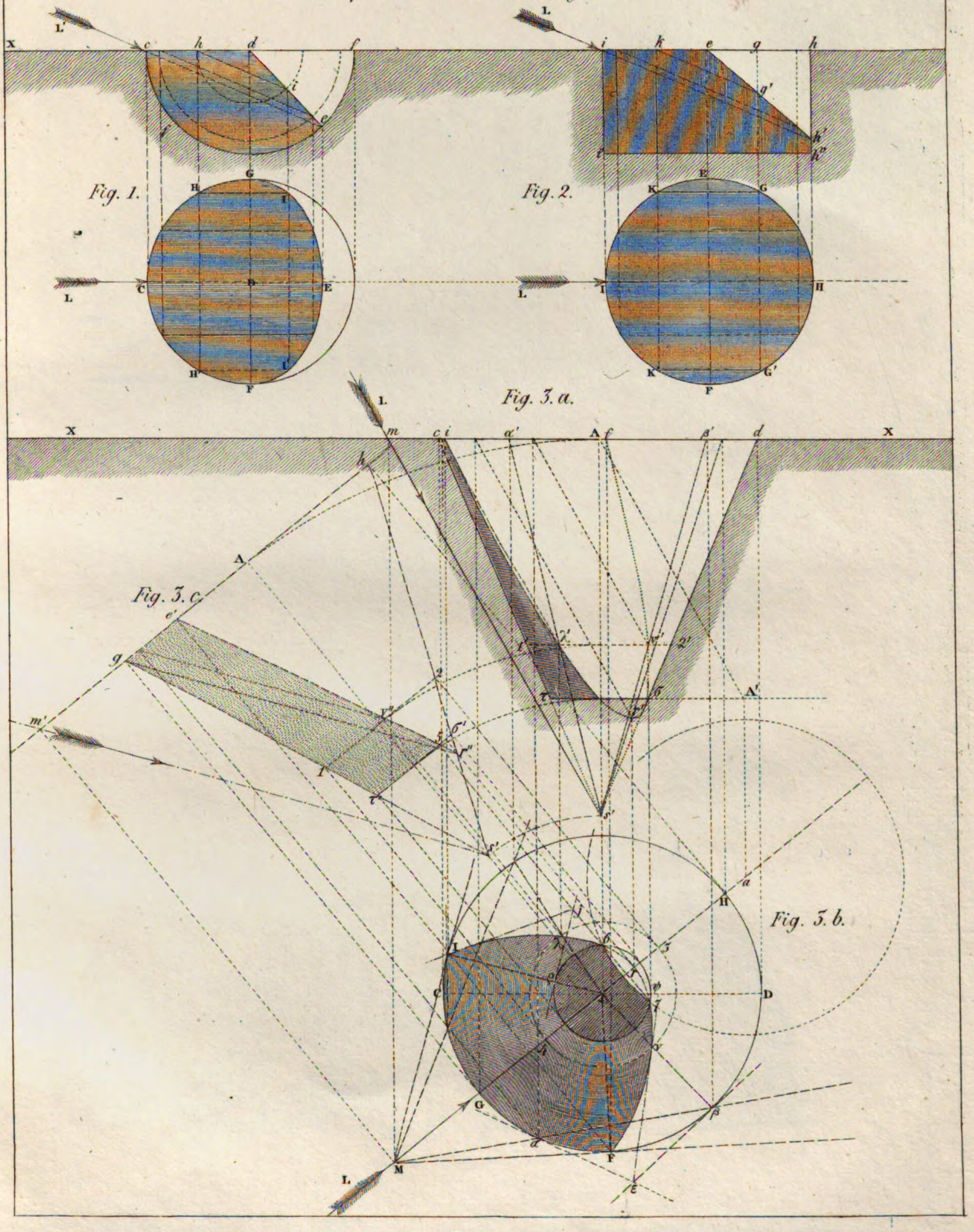
Schatten-Constructionen.

Körper mit runder Krümmung.



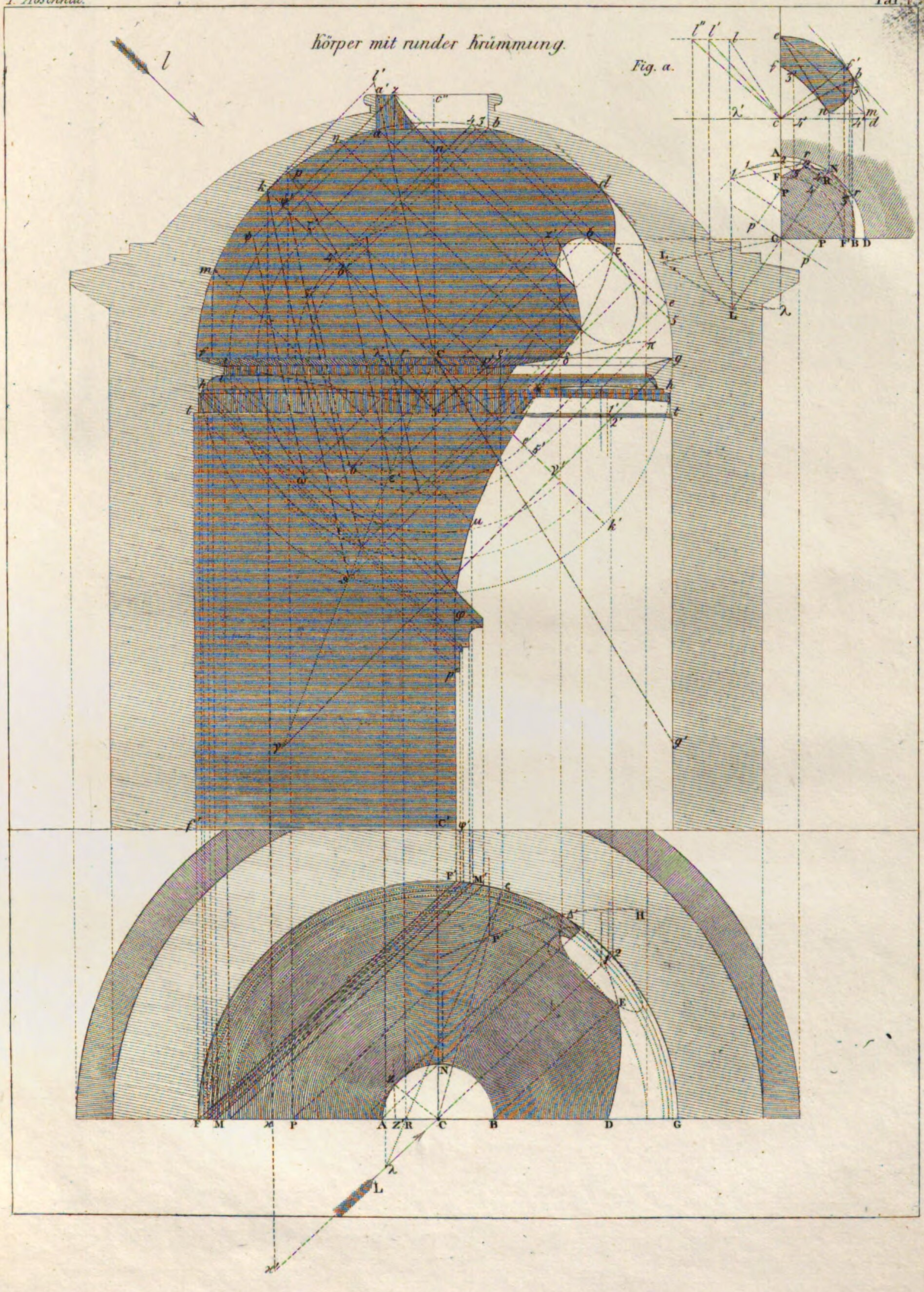
Schatten-Constructionen.

Körper mit runder Krümmung.



Zeichnungslehre.

Schatten - Constructionen.



w
x'
j'
k'
l'
w'

Schatten - Constructionen.

Körper mit inflectiv gekrümmter Oberfläche.

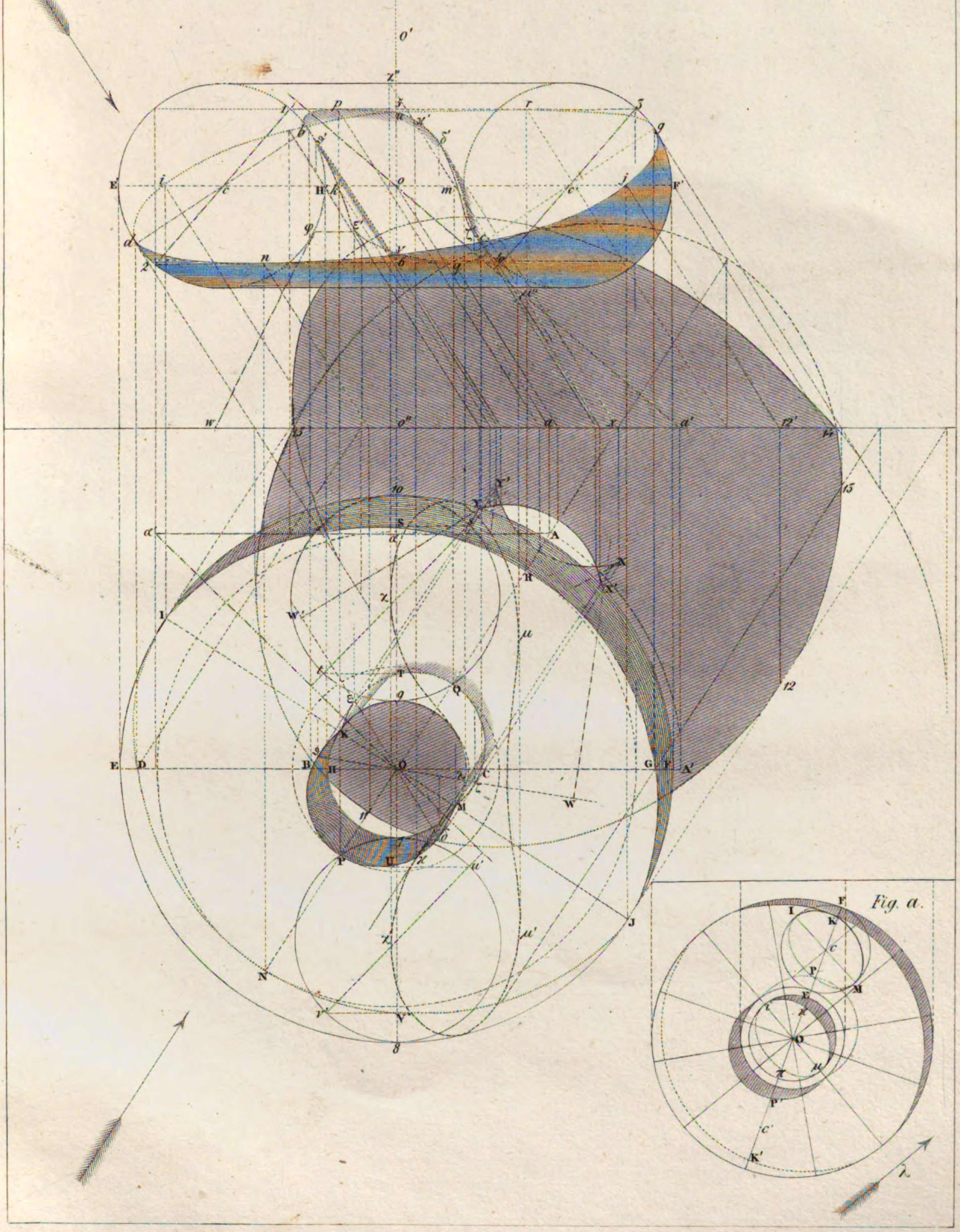
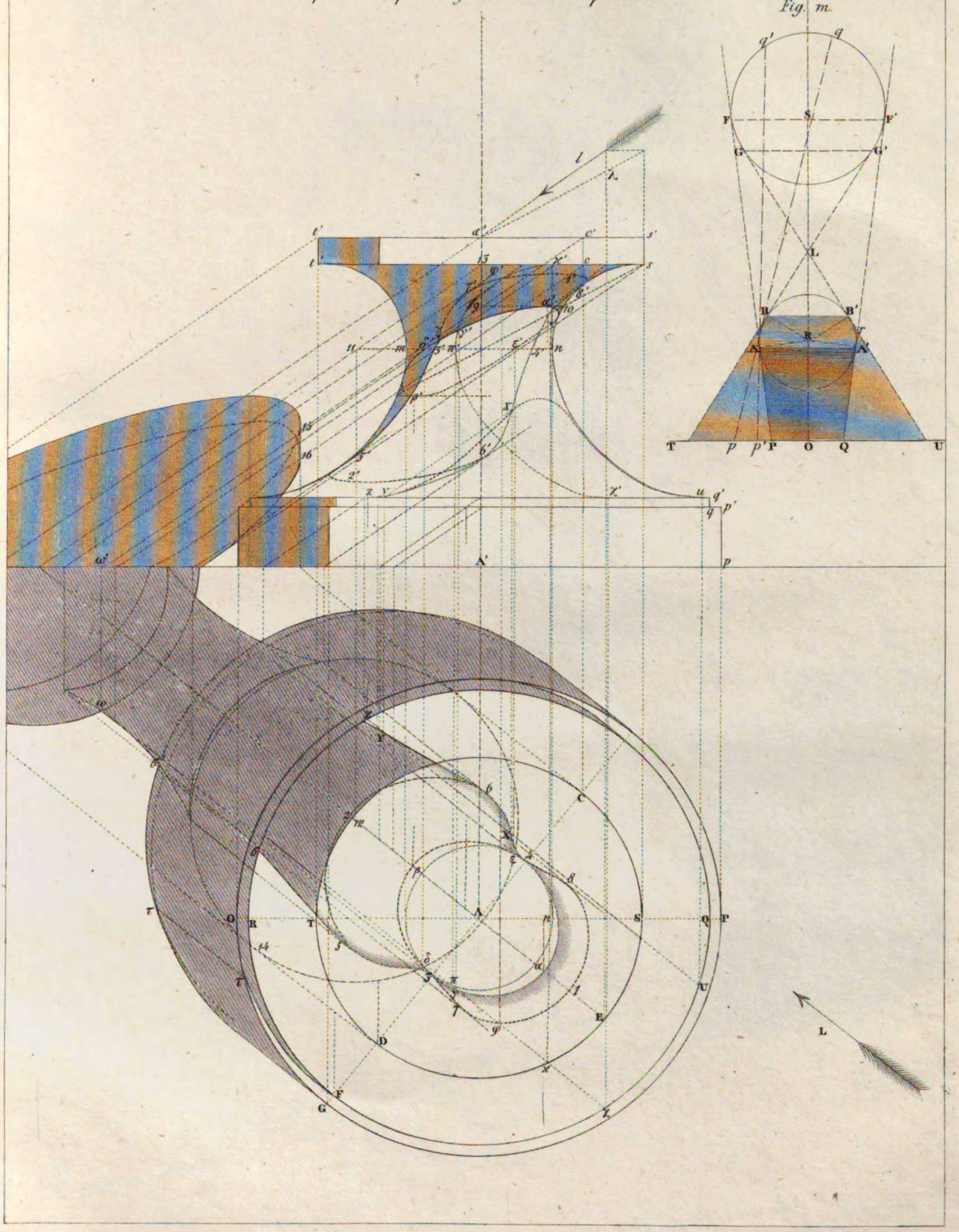


Fig. a.

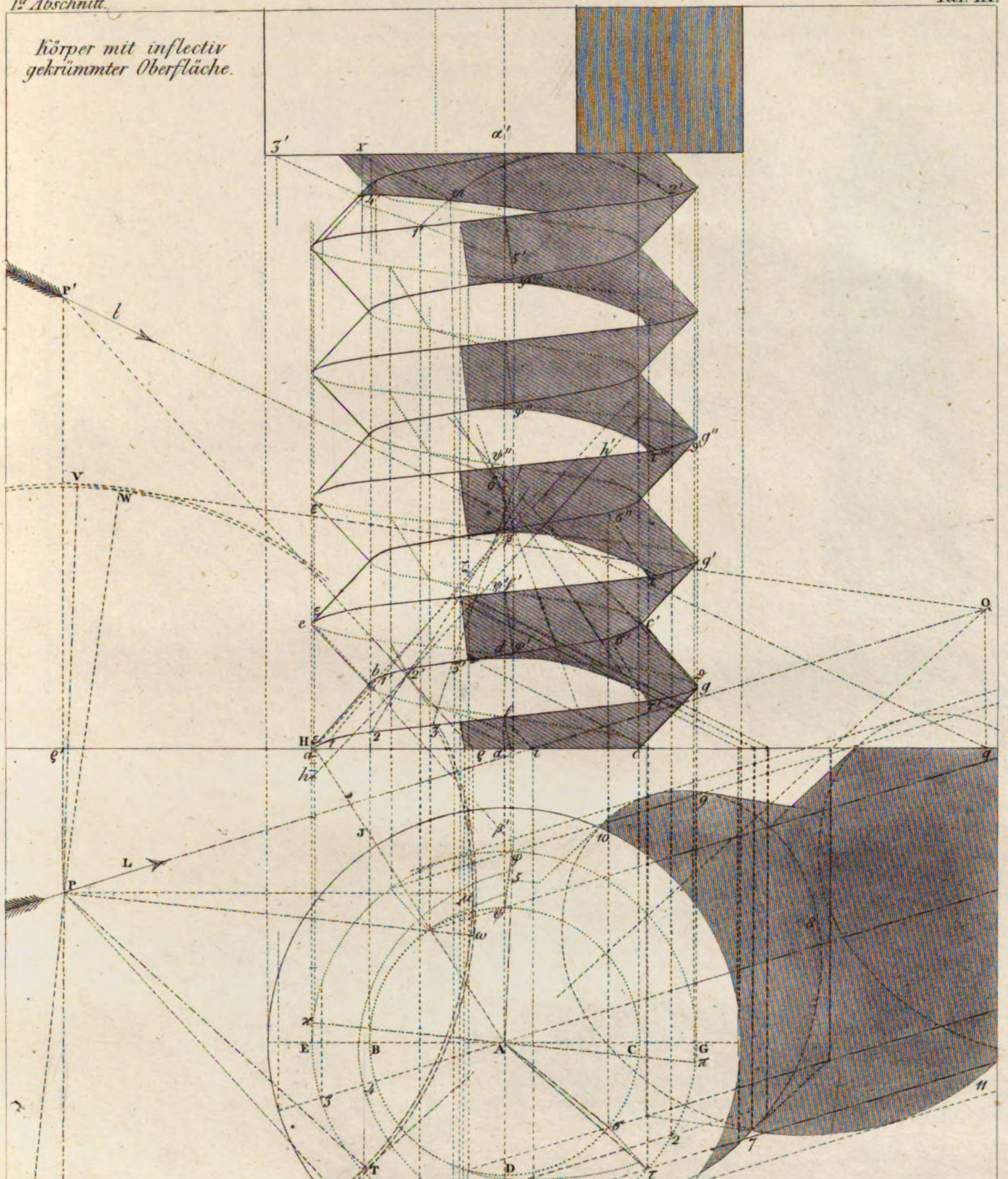
Schatten - Constructionen.

Körper mit inflectiv gekrümmter Oberfläche.



Schatten-Constructionen.

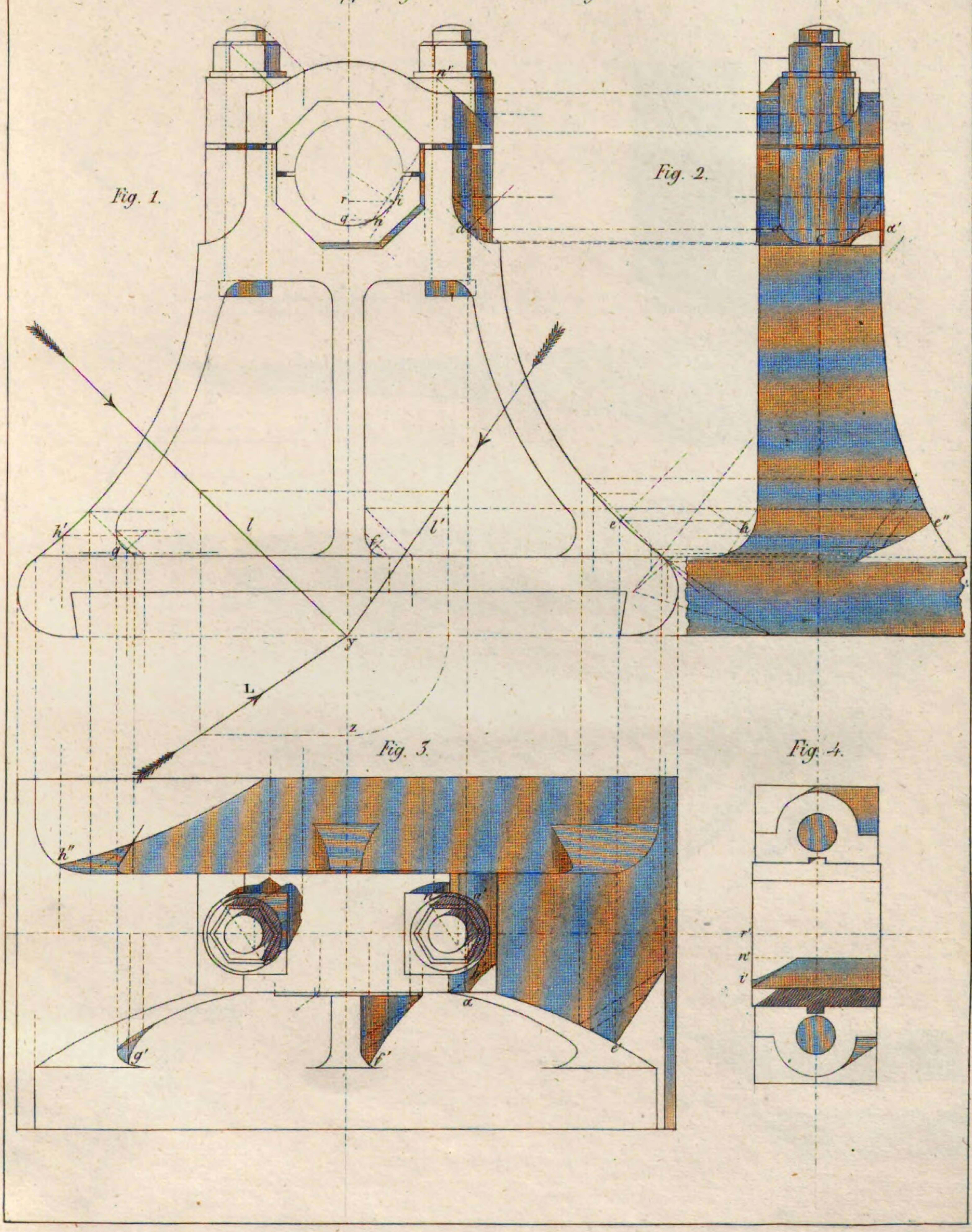
Körper mit inflectiv gekrümmter Oberfläche.



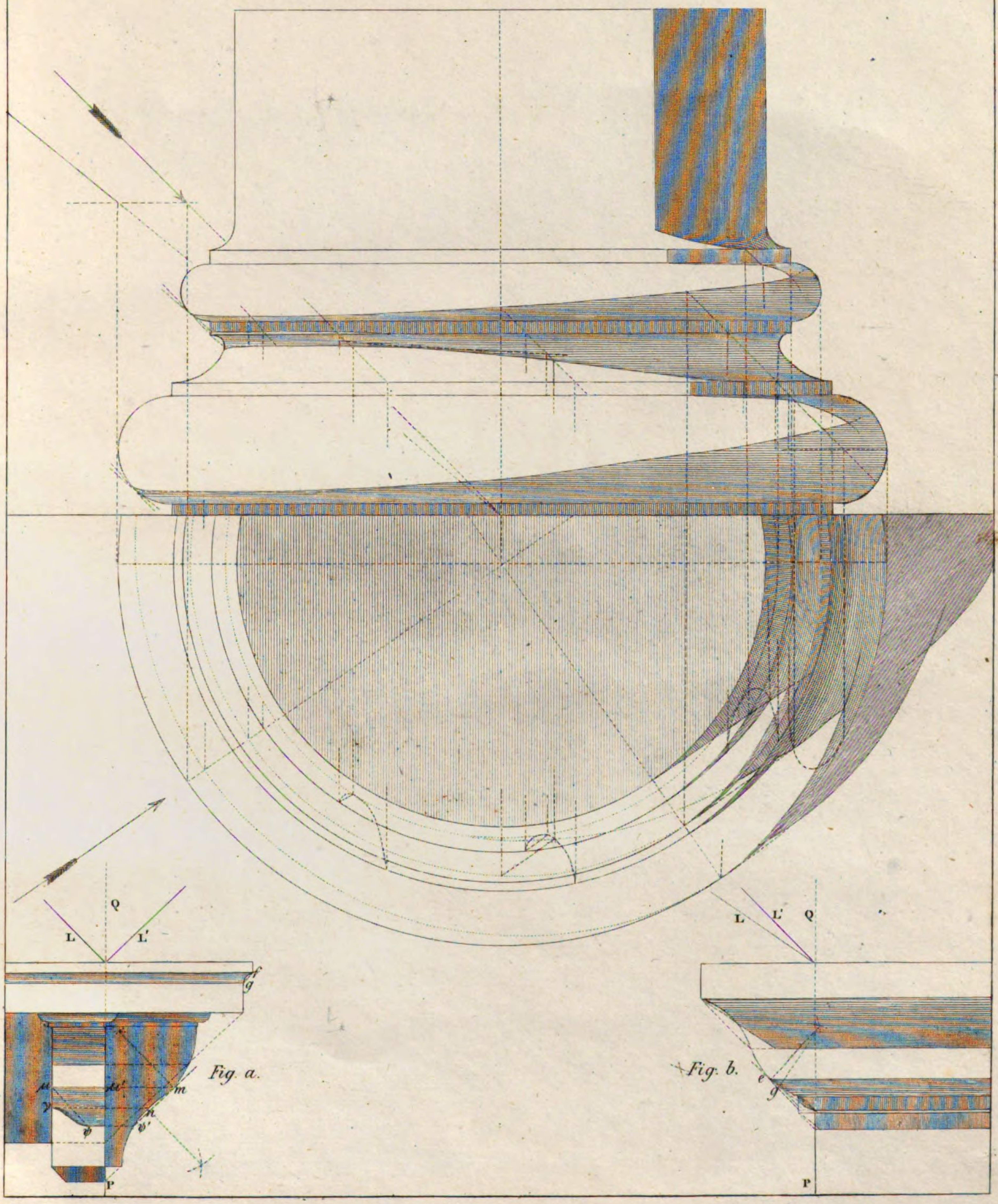
Zeichnungslehre.

Schatten-Constructionen.

Zapfenlager mit einem Träger.

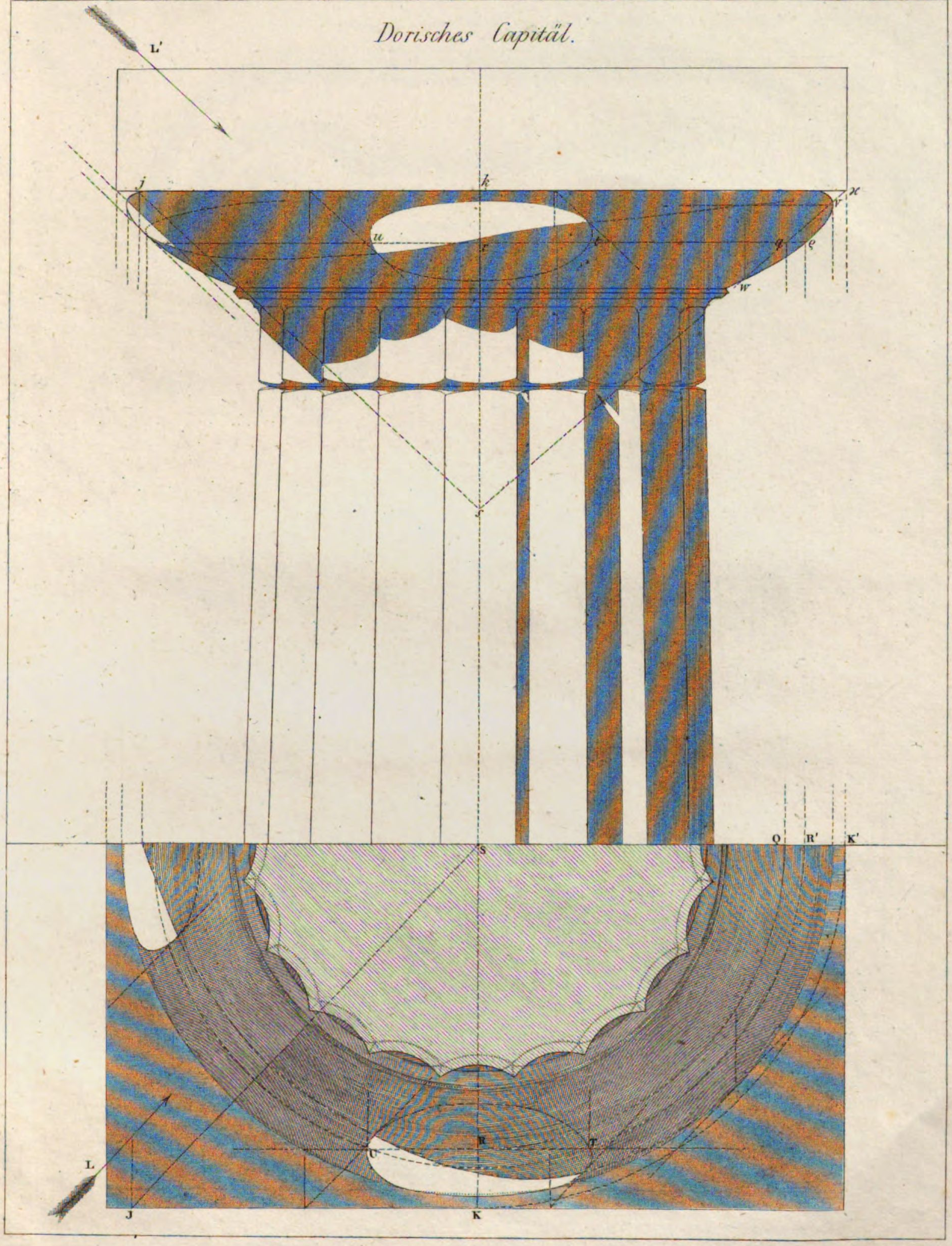


Attischer Säulenfuss.



Schatten-Constructionen.

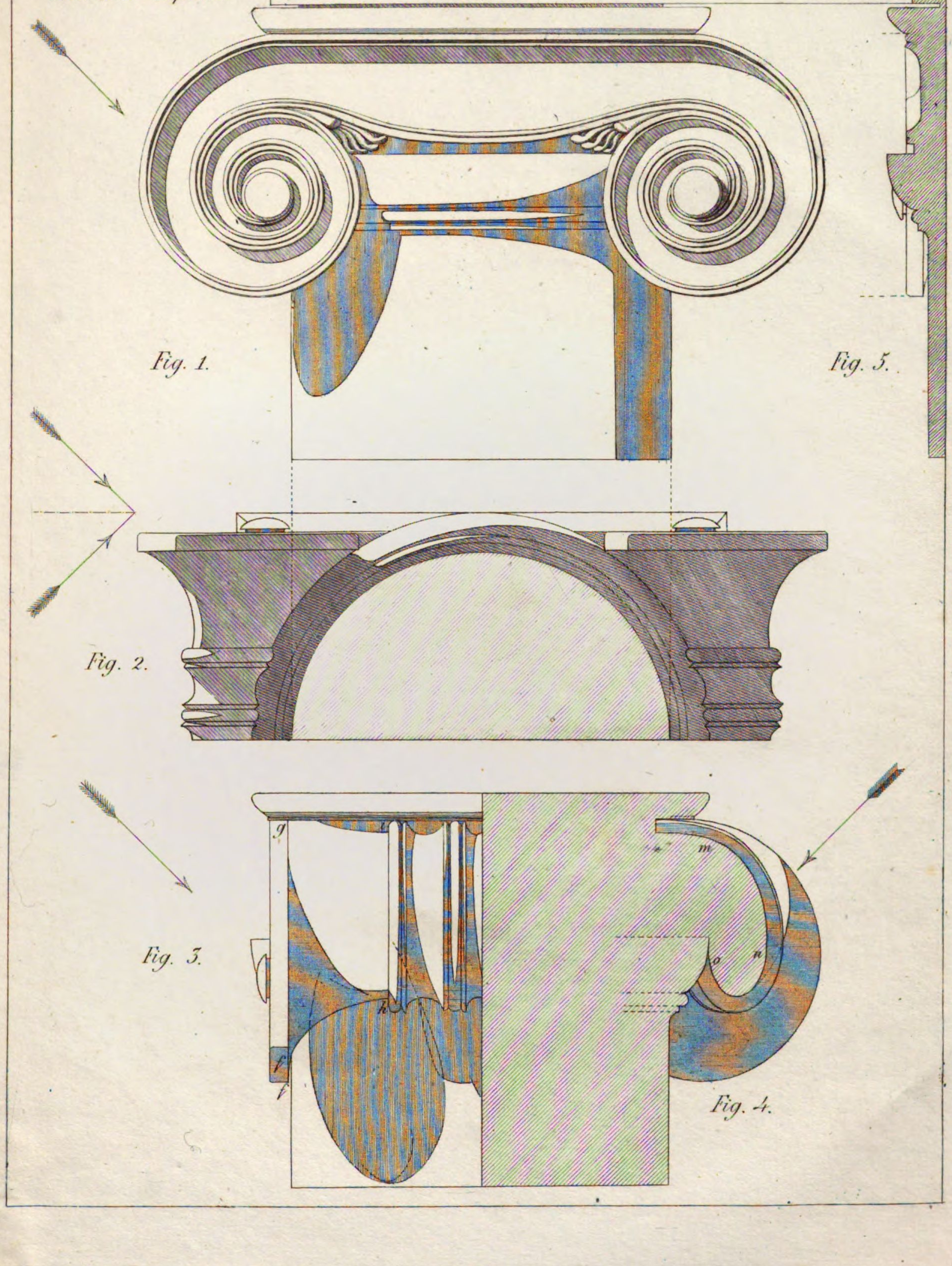
Dorisches Capitäl.



Zeichnungslehre.

Schatten-Constructionen.

Jonisches Capitäl.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schreiber, Guido

Cursus der darstellenden Geometrie

Bd.: 2,1.

Freiburg ; Karlsruhe 1833

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- 4 Math 522 -2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11218528-7